

Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft

Akademia Libroservo/IfK
Kleinenberger Weg 16B
D-33100 Paderborn

Die Humankybernetik (Anthropokybernetik) umfaßt alle jene Wissenschaftszweige, welche nach dem Vorbild der neuzeitlichen Naturwissenschaft versuchen, Gegenstände, die bisher ausschließlich mit geisteswissenschaftlichen Methoden bearbeitet wurden, auf Modelle abzubilden und mathematisch zu analysieren. Zu den Zweigen der Humankybernetik gehören vor allem die Informationspsychologie (einschließlich der Kognitionsforschung, der Theorie über „künstliche Intelligenz" und der modellierenden Psychopathometrie und Geriatrie), die Informationsästhetik und die kybernetische Pädagogik, aber auch die Sprachkybernetik (einschließlich der Textstatistik, der mathematischen Linguistik und der konstruktiven Interlinguistik) sowie die Wirtschafts-, Sozial- und Rechtskybernetik. - Neben diesem ihrem hauptsächlichen Themenbereich pflegen die GrKG/Humankybernetik durch gelegentliche Übersichtsbeiträge und interdisziplinär interessierende Originalarbeiten auch die drei anderen Bereiche der kybernetischen Wissenschaft: die Biokybernetik, die Ingenieurkybernetik und die Allgemeine Kybernetik (Strukturtheorie informationeller Gegenstände). Nicht zuletzt wird auch metakybernetischen Themen Raum gegeben: nicht nur der Philosophie und Geschichte der Kybernetik, sondern auch der auf kybernetische Inhalte bezogenen Pädagogik und Literaturwissenschaft. -

La prihoma kibernetiko (antropokibernetiko) inkluzivas ĉiujn tiajn sciencobranĉojn, kiuj imitante la novepokan natursciencon, klopodas bildigi per modeloj kaj analizi matematike objektojn ĝis nun pritraktitajn ekskluzive per kultursciencaj metodoj. Apartenas al la branĉaro de la antropokibernetiko ĉefe la kibernetika psikologio (inkluzive la ekkon-esploron, la teoriojn pri „artefarita intelekto" kaj la modeligajn psikopatometrion kaj geriatrion), la kibernetika estetiko kaj la kibernetika pedagogio, sed ankaŭ la lingvokibernetiko (inkluzive la tekststatistikon, la matematikan lingvistikon kaj la konstruan interlingvistikon) same kiel la kibernetika ekonomio, la socikibernetiko kaj la jurkibernetiko. - Krom tiu ĉi sia ĉefa temaro per superrigardaj artikoloj kaj interfake interesigaj originalaj laboraĵoj GrKG/HUMANKYBERNETIK flegas okaze ankaŭ la tri aliajn kampojn de la kibernetika scienco: la biokibernetikon, la inĝenierkibernetikon kaj la ĝeneralan kibernetikon (strukturteorion de informecaj objektoj). Ne lastavice trovas lokon ankaŭ metakibernetikaj temoj: ne nur la filozofio kaj historio de la kibernetiko, sed ankaŭ la pedagogio kaj literaturscienco de kibernetikaj sciaĵoj. -

Cybernetics of Social Systems comprises all those branches of science which apply mathematical models and methods of analysis to matters which had previously been the exclusive domain of the humanities. Above all this includes *information psychology* (including theories of cognition and 'artificial intelligence' as well as psychopathometrics and geriatrics), *aesthetics of information* and *cybernetic educational theory*, *cybernetic linguistics* (including text-statistics, mathematical linguistics and constructive interlinguistics) as well as *economic*, *social* and *juridical cybernetics*. - In addition to its principal areas of interest, the GrKG/HUMANKYBERNETIK offers a forum for the publication of articles of a general nature in three other fields: *biocybernetics*, *cybernetic engineering* and *general cybernetics* (theory of informational structure). There is also room for *metacybernetic* subjects: not just the history and philosophy of cybernetics but also cybernetic approaches to education and literature are welcome.

La cybernétique sociale contient tous le branches scientifiques, qui cherchent à imiter les sciences naturelles modernes en projetant sur des modèles et en analysant de manière mathématique des objets, qui étaient traités auparavant exclusivement par des méthodes des sciences culturelles („idéographiques"). Parmi les branches de la cybernétique sociale il y a en premier lieu la psychologie informationelle (inclues la recherche de la cognition, les théories de l'intélligence artificielle et la psychopathométrie et gériatrie modeliste), l'esthétique informationelle et la pédagogie cybernétique, mais aussi la cybernétique linguistique (inclues la statistique de textes, la linguistique mathématique et l'interlinguistique constructive) ainsi que la cybernétique en économie, sociologie et jurisprudence. En plus de ces principaux centres d'intérêt la revue GrKG/HUMANKYBERNETIK s'occupe - par quelques articles de synthèse et des travaux originaux d'intérêt interdisciplinaire - également des trois autres champs de la science cybernétique: la biocybernétique, la cybernétique de l'ingenieur et la cybernétique générale (théorie des structures des objets informationels). Une place est également accordée aux sujets métacybernétiques mineurs: la philosophie et l'histoire de la cybernétique mais aussi la pédagogie dans la mesure où elle concernent la cybernétique.

ISSN 0723-4899

Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft

Internationale Zeitschrift für Modellierung und Mathematisierung in den Humanwissenschaften
Internacia Revuo por Modeligo kaj Matematikizo en la Homsciencoj
International Review for Modelling and Application of Mathematics in Humanities
Revue internationale pour l'application des modèles et de la mathématique en sciences humaines
Rivista internazionale per la modellizzazione matematematica delle scienze umane



Inhalt * Enhavo * Contents * Sommaire * Indice

Band 42 * Heft 4 * Dez. 2001



Akademia Libroservo

Die GRUNDLAGENSTUDIEN AUS KYBERNETIK UND GEISTESWISSENSCHAFT

(grkg/Humankybernetik) wurden 1960 durch Max BENSE, Gerhard EICHHORN und Helmar FRANK begründet. Sie sind z.Zt. offizielles Organ folgender wissenschaftlicher Einrichtungen:

(Deutsche) Gesellschaft für Kybernetik e.V.
- vormals Institut für Kybernetik Berlin / Gesellschaft für Kommunikationskybernetik -
(Vorsitzender: Prof.Dr.phil.habil. Heinz Lohse, Leipzig, D)

TAKIS - Tutmonda Asocio pri Kibernetiko, Informadiko kaj Sistemiko
(prezidanto: AProf.Dr.habil. Eva Poláková, Nitra, SK)

AKADEMIO INTERNACIA DE LA SCIENCOJ (AIS) San Marino
publikigadas siajn oficialajn sciigojn komplete en grkg/Humankybernetik

Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft

Internationale Zeitschrift für Modellierung und Mathematisierung in den Humanwissenschaften
Internacia Revuo por Modeligo kaj Matematikizo en la Homscienco j
International Review for Modelling and Application of Mathematics in Humanities
Revue internationale pour l'application des modèles et de la mathématique en sciences humaines



Inhalt * Enhavo * Contents * Sommaire * Indice **Band 42 * Heft 4 * Dez. 2001**



Akademia Libroservo

Verlag und Anzeigenverwaltung **Eldonejo kaj anoncadministrejo** **Publisher and advertisement administrator** **Edition et administration des annonces**



Akademia Libroservo - Internacia Eldongrupo Scienca:
AIEP - San Marino, Esprima - Bratislava, Kava-Pech - Dobrichovice/Praha
IfK GmbH - Berlin & Paderborn,
Gesamtherstellung: **IfK GmbH**
Verlagsabteilung: Kleinenberger Weg 16 B, D-33100 Paderborn,
Telefon (0049-/0-)5251-64200 Telefax: -163533
http://grkg.126.com/

Die Zeitschrift erscheint vierteljährlich (März, Juni, September, Dezember). Redaktionsschluß: 1. des vorigen Monats. - Die Bezugsdauer verlängert sich jeweils um ein Jahr, wenn bis zum 1. Dezember keine Abbestellung vorliegt. - Die Zusendung von Manuskripten (gemäß den Richtlinien auf der dritten Umschlagseite) wird an die Schriftleitung erbeten, Bestellungen und Anzeigenaufträge an den Verlag. - Z. Zt. gültige Anzeigenpreisliste auf Anforderung.

La revuo aperadas kvaronjare (marte, junie, septembre, decembre). Redakcia limdato: la 1-a de la antaŭa monato. - La abondaŭro plilongiĝas je unu jaro se ne alvenas malmendo ĝis la unua de decembro. - Bv. sendi manuskriptojn (laŭ la direktivoj sur la tria kovrilpaĝo) al la redakcio, mendojn kaj anoncojn al la eldonejo. - Momente valida anoncprezlisto estas laŭpete sendota.

This journal appears quarterly (every March, Juni, September and December). Editoial deadline is the 1st of the previous month. - The subscription is extended automatically for another year unless cancelled by the 1st of December. - Please send your manuscripts (fulfilling the conditions set our on the third cover page) to the editorial board, subscription orders and advertisements to the publisher. - Current prices for advertisements at request.

La revue est trimestrielle (parution en mars, juin, septembre et décembre). Date limite de la rédaction: le 1er du mois précédent. L'abonnement se prolonge chaque fois d'un an quand une lettre d'annulation n'est pas arrivée le 1er décembre au plus tard. - Veuillez envoyer, s.v.p., vos manuscrits (suivant les indications de l'avant-dernière page) à l'adresse de la rédaction, les abonnements et les demandes d'annonces à celle de l'édition. - Le tarif des annonces en vigueur est envoyé à la demande.

Bezugspreis: Einzelheft 20,-- DM; Jahresabonnement: 80,-- DM plus Versandkosten.

Druck: Druckerei Reike GmbH, D-33106 Paderborn

grkg / Humankybernetik
Band 42 · Heft 4 (2001)
Akademia Libroservo / IfK

Lernwahrscheinlichkeit und Darbietungsdauer

von Helmar G. FRANK, Paderborn (D)

Aus dem Lehrgebiet *Kybernetische Pädagogik und Bildungstechnologie* der Universität Paderborn

1. *Ziel*

In seinem Beitrag zur vorangegangenen Nummer der GrKG/H erwähnte der Verfasser eine frühe Fallstudie, die unveröffentlicht geblieben war, u.a. weil sie auf eine von ihm damals nicht für möglich gehaltene Proportionalität zwischen der Lernwahrscheinlichkeit a von Lehrstoffelementen (Vokabeln) und ihrer Betrachtungszeit (Darbietungsdauer) τ hinzudeuten schien (Frank, 2001, S. 93). Für das Intervall $i/C_K < \tau < i/C_v$ (i = Information des Lehrstoffelements, C_K = Apperzeptionsgeschwindigkeit, C_v = Lerngeschwindigkeit) folgt diese Proportionalität aber aus der nun (Frank, 2001, S. 91 – 94) theoriegestützt vorgenommenen Modellierung des Lernprozesses. Sie soll hier durch die Auswertung des erhalten gebliebenen Protokolls der damaligen Fallstudie eine ergänzende empirische Bestätigung erhalten. Wünschenswert ist eine Versuchswiederholung mit mehr Versuchspersonen, einer genaueren Lernzeitbestimmung und einer Ermittlung auch der Lehrstoffinformation.

2. *Beschreibung der durchgeführten Fallstudie*

In einer Seminarveranstaltung an der Technischen Universität Berlin versuchten am 15. 12. 1986 zwei als Versuchspersonen benutzte Studenten der Kommunikationswissenschaft (L.S. und R.S.) N = 64 ILo-Vokabeln verstehen (also passiv beherrschen) zu lernen. Diese waren der Liste der sog. Strukturwörter (Tabellwörter, Präpositionen, Konjunktionen usf.) und der 50 häufigsten sonstigen Wörter entnommen, die der Europaklub 1977 als Gegenstand des vierten der fünf Prüfungsteile seiner Sprachverständnisprüfung aufgestellt hatte (vgl. Molter, 1978). Auf der Vorderseite von 64 Lernkärtchen stand je eine dieser Vokabeln, auf der Rückseite die deutsche Übersetzung. Die Lerner legten bei den Durchgängen k = 1, 2, 3, ... die N_k Kärtchen jener Vokabeln beiseite, deren Bedeutung sie inzwischen (also beim k-1-ten Durchgang) gelernt hatten. Folglich waren beim k+1-ten Durchgang N_k Kärtchen weniger als beim k-ten Durchgang zu betrachten, nämlich nur jene U_{k-1}, die am Ende des k-1-ten Durchgangs noch ungelernt waren. Festgehalten wurde für jede Versuchsperson und jede Vokabel der Durch-

gang k-1, bei welchem sie gelernt wurde. Die N_1 schon beim k = 1-ten Durchgang ausgeschiedenen Kärtchen enthielten das (sozusagen "beim Durchgang k-1 = 0" erworbene) *Vorwissen*; beim ersten Durchgang waren also nur $U_0 = N - N_1$ der Vokabeln noch lernbar (Bild 1).

(1) Lehrstoff-element	(2) k-1 LS	RS	(1)	(2)		(1)	(2)	
			el : *aus*	1	4	**per** : *mit, mittels*	0+	2
			en : *in*	0	1	**plu** : *mehr, weiter*	0	
al : *nach, zu*		3	**for** : *weg*		1	**po** : *pro, je*	4	
alia : *anders*	1	2	**ĝis** : *bis*	3+	2	**por** : *für*	1+	0
almenaŭ : *wenigstens*	4	4	**hieraŭ** : *gestern*	2	2	**post** : *nach*	0+	0+
			hodiaŭ : *heute*	2+	1+	**preskaŭ** : *fast*	7	4
						preter : *vorbei*		2+
ambaŭ : *beide*	5	2	**jam** : *schon*	6		**pri** : *über*	4	
ankaŭ : *auch*			**jen ... jen** : *bald ... bald*	2	3	**pro** : *wegen*	7	
ankoraŭ : *noch*			**ju ... des** : *je... desto*		1	**se** : *wenn*	6	
anstataŭ : *anstatt*	2	2+	**kaj ... kaj** : *sowohl ... als auch*		1+	**sed** : *aber*	2	3
antaŭ : *vor*		4+	**ke** : *daß*			**sen** : *ohne*		
apenaŭ : *kaum*			**kelkaj** : *einige*	5+		**sub** : *unter*	0+	1
apud : *neben*	4		**kontraŭ** : *gegen*	0+	2+	**super** : *über*	1	1
aŭ ... aŭ *entweder ... oder*	1		**krom** : *außer, nebst*			**supre** : *oben*	3+	1
ĉar : *weil*		1	**kun** : *mit*	2+		**sur** : *auf*	0+	
ĉe : *bei*			**kvankam** : *ob-wohl*			**tamen** : *dennoch*		
ĉirkaŭ : *um*	2	1+	**kvazaŭ** : *als ob*	6		**tra** : *durch*	4	2+
ĉu ... ĉu : *ob ... ob*	4	1	**laŭ** : *nach, gemäß*	6	2	**trans** : *jenseits*	2	2
do : *also*			**malgraŭ** : *trotz*			**tre** : *sehr*	7	
dum : *während*			**mem** : *selbst*	4	3	**tro** : *zu (sehr)*	2	3
eĉ : *sogar*			**nek ... nek** : *weder ... noch*		2+	**tuj** : *sofort*	5	4
ekster : *außerhalb*			**nepre** : *unbedingt*	7	4	**vi** : *du, ihr*	3	3

Bild 1: Bild 1: N = 64 Lehrstoffelemente (ILo-Vokabeln), Zahl k-1 der Lernversuche bis zum Eintritt des Lernerfolgs sowie Ergebnis des nach 4 Wochen durchgeführten Behaltenstests (+ = noch beherrscht) für zwei Versuchspersonen (L.S. und R.S)

Gemessen wurden außerdem die Lernzeiten t_k, die vom Versuchsbeginn bis zum Ende des k-ten Durchgangs (also für das Betrachten von $N + U_0 + ... + U_{k-2}$ Kärtchen und das Aussondern von $N_1 + N_2 + ... + N_k$ Kärtchen) verstrichen waren. Aus diesen Urdaten ergeben sich die Anzahlen N_k und U_k unmittelbar (Bild 2), und τ als Quotient $t_k /(N + U_0 + ... + U_{k-2})$.

(1) k	(2) t_k [min]	(3) N_k	(4) U_k	(5) $\tau(k)$ [sek]	(6) $\bar{\tau}(k)$ [sek]	(7) $a_1(k)$ [%]	(8) $\bar{a}_1(k)$ [%]	(9) $a_2(k)$ [%]	(10) λ_k [%/sek]	(11) $\bar{\lambda}_k$ [%/sek]
0	?	-	57	-	-	?	?	?	-	-
1	5,5	7	52	5,16	5,16	8,77	8,77	8,77	1,70	1,70
2	10,6	5	43	5,37	5,26	17,31	12,84	13,14	3,22	2,47
3	15,3	9	40	5,42	5,31	6,98	11,18	11,14	1,29	2,10
4	20,9	3	33	7,81	5,81	17,50	12,50	12,77	2,24	2,17
5	24,9	7	30	6,00	5,84	9,09	12,00	12,05	1,51	2,06
6	30,1	3	26	9,45	6,25	13,33	12,16	12,26	1,41	1,95
7	36,0	4	22	11,80	6,77	16,38	12,46	12,72	1,30	1,86
8	38,6	4	?	6,00	6,71	?	?	?	-	-
0	?	-	62	-	-	?	?	?	-	-
1	7,9	2	51	7,41	7,41	17,74	17,74	17,74	2,39	2,39
2	17,7	11	39	9,48	8,43	23,53	20,35	20,69	2,48	2,43
3	28,0	12	33	12,12	9,49	15,34	19,08	18,96	1,27	2,00
4	33,3	6	27	8,15	9,17	18,18	18,92	18,77	2,23	2,06
5	38,6	6	?	9,64	9,01	?	?	?	-	-

Bild 2: Gesamtlernzeiten t_k für k Lernversuche der Lehrstoffelemente von Bild 1, jeweils ausgesonderte (N_k) und anschließend noch unbekannte (U_k) Elemente, durchschnittliche Darbietungszeit, Lernwahrscheinlichkeit und Lernleichtigkeit für die Versuchspersonen L.S. (oben) und R.S. (unten).

L.S. ließ sich für k = 8 Durchgänge t_8(L.S.) = 38,6 Minuten Zeit und schied dabei insgesamt 42 Kärtchen aus, davon N_1(L.S.) = 7 als Vorwissen schon beim ersten Durchgang. Mehr Zeit τ pro Vokabel und Durchgang investierte R.S., der in derselben Zeit nur 5 Durchgänge schaffte und 37 Kärtchen ausscheiden konnte, davon N_1(R.S.) = 2 als Vorwissen. Zufällig galt also t_8(L.S.) = t_5(R.S.) und beide Versuchspersonen erhöhten in dieser Zeit ihr Vorwissen um Z = 42-7 = 37-2 = 35 Vokabeln.

Zur Ermittlung von a benötigt man außer den Beobachtungsergebnissen ein Modell, das ihnen theoretische Werte als Funktionswerte einer aus dem Modell deduzierbaren Funktion mit dem Parameter a gegenüberzustellen erlaubt, so dass durch Gleichsetzung der empirischen und der a-abhängigen, theoretischen Werte a ermittelbar wird. Um auch andere (vertiefende oder alternative) Auswertungen zu ermöglichen, sind in Bild 1 die Urdaten der Lernergebnisse von L.S. und R.S. wiedergegeben. Eingetragen sind auch die Ergebnisse eines nach genau 4 Wochen erfolgten Behaltenstests. Obwohl L.S. relativ flüchtig, dafür aber öfter, R.S. erheblich sorgfältiger, aber mit weniger Wiederholungen gleichviel hinzulernte, vergaßen beide etwa gleich viel: im Behaltenstest wusste L.S. noch 11/42 ≈ 26,2% des 4 Wochen zuvor gelernt Gewesenen, R.S. 10/37 ≈ 27,0%. Dies entspricht einer frühen Erfahrung mit der Programmierten Instruktion: „die Behaltensleistungen sind gleich gut" (Weltner, 1964, 16.f), unabhängig davon, wie die Kompetenz erworben wurde – vorausgesetzt, bei keinem der Vergleichsfälle fand ein Überlernen statt. Ein solches wird durch das Ausscheiden der Kärtchen weitgehend ausgeschlossen; nur beim jeweils letzten Durchgang, bei dem das Gelerntsein einer Vokabel festgestellt und ihr Kärtchen beiseitegelegt wird, ist ein Überlernen möglich.

Überlernt könnte das Vorwissen gewesen sein; jedoch vergaß davon L.S. 2/7, R.S. ½ innerhalb von 4 Wochen.

3. *Bezugsmodell der Datenauswertung*

Das stark vereinfachende, *probabilistische* ALZUDI-Lernmodell (zurückgehend auf Frank, 1966, S. 109f. und Frank/Graf, 1967, ausführlich dargestellt z.B. in Frank, 1996, S. 37ff) setzt (1) Konstanz der Lernwahrscheinlichkeit a, (2) fehlende Transferwirkung zwischen den einzelnen Lehrstoffelementen und (3) Vernachlässigbarkeit des vor Ende der Lernversuche schon erfolgten Vergessens voraus. Im vorangegangenen Beitrag (Frank, 2001) wurde es auf ein *deterministisches* Modell zurückgeführt, das die Zufälligkeit auf den *Zeitpunkt der Apperzeption* beschränkt. Unabhängig von der Wirkungsstelle des Zufalls ist die *Wahrscheinlichkeit* a, dass ein bestimmtes Element bei einem bestimmten Lernanlass gelernt wird, messbar durch die relative Häufigkeit der Lernerfolge bei einem k-ten Durchgang, zu dessen Beginn noch U_{k-1} Lernelemente ungelernt waren. (Würden - entgegen der dritten Modellvoraussetzung - bei diesem Durchgang Elemente gelernt aber vor Schluss des Durchgangs wieder vergessen, dann würde die Lernwahrscheinlichkeit durch die relative Häufigkeit der - N_{k+1} - im nächsten Durchgang noch bekannten und daher beiseitelegbaren Elemente *systematisch zu klein* gemessen. Bestünde umgekehrt - entgegen der zweiten Modellvoraussetzung - eine positive Transferwirkung, also eine Lernerleichterung, zwischen verschiedenen Lehrstoffelementen, dann würde dies zu einem *systematisch zu großen* Messwert führen.) Von den $U_0 = N - N_1$ Elementen, die beim k = 1-ten Durchgang noch lernbar waren, wurden tatsächlich N_2 gelernt; ihre Kärtchen wurden beim darauffolgenden (k+1 =) 2-ten Durchgang beiseitegelegt. Die relative Häufigkeit des Lernerfolgs ist also beim ersten Durchgang $a_1(1) := N_2 / (N - N_1) = N_2 / U_0$. Die Zahl U_k der nach dem k-ten Durchgang noch unbekannten Lernelemente ist allgemein um die Zahl N_{k+1} der bei diesem Durchgang gelernten Elemente (also der beim folgenden Durchgang beiseitegelegten Kärtchen) kleiner als die Zahl U_{k-1} der zuvor unbekannten Elemente:

$$(1)\ U_k = U_{k-1} - N_{k+1} = N - {}_{i=1}\Sigma^{k+1}\ N_i$$

Für den k-ten Messwert von a, nämlich für die relative Häufigkeit des Lernerfolgs beim k-ten Durchgang, gilt also allgemein

$$(2)\ a \approx N_{k+1} / U_{k-1} =: a_1(k)$$

Wenn gemäß der ersten Modellvoraussetzung *keine Bahnung* stattfindet (also ein beim k-ten Durchgang zufällig *nicht* gelerntes Element nicht mit vergrößerter - oder, wegen des Misserfolgserlebnisses, verkleinerter - Wahrscheinlichkeit beim nächsten Durchgang gelernt wird), dann ist a unabhängig von k. Man kann also die Einzelbeobachtungen der ersten k Durchgänge vereinigen und als Quotient der nun $N_2 + ... + N_{k+1} = {}_{i=1}\Sigma^k\ N_{i+1}$ Lernerfolge durch die auf $U_0 + ... + U_{k-1} = {}_{i=1}\Sigma^k\ U_{i-1}$ *vergrößerte* Zahl von Lernmöglichkeiten einen Messwert für a gewinnen, von dem (falls k>1) ein *kleinerer* zufälliger Messfehler zu erwarten ist:

$$(3)\ a \approx \bar{a}_1(k) = {}_{i=1}\Sigma^k\ N_{i+1} / {}_{i=1}\Sigma^k\ U_{i-1}$$

Offensichtlich ist $\bar{a}_1(k)$ der gewichtete, arithmetische Mittelwert der ersten k nach (2) ermittelten Ergebnisse $a_1(i)$, wobei die Werte $\bar{U}_{i-1}$ die (absoluten) Gewichte bilden.

Einen zweiten, ebenfalls mit wachsendem k zuverlässiger werdender Messwert $a_2(k)$, dessen Komplement $1-a_2(k)$ sich als (nicht gewichteter) geometrischer Mittelwert der Komplemente $1- a_1(k)$ erweisen wird, erhält man durch Vergleich der bei den k ersten Durchgängen gewonnenen empirischen Ergebnisse mit den auf der Basis des ALZUDI-Lernmodells errechneten theoretischen Werten. Die Wahrscheinlichkeit u_k, dass ein Element nach k Lernanlässen noch immer nicht gelernt wurde (also die „Inkompetenz" oder „Unkenntnis"), ist nach diesem Modell

$$(4)\ u_k = u_0(1-a)^k$$

Dabei bezeichnet u_0 die Wahrscheinlichkeit, zu Beginn des ersten Lernanlasses des Versuchs noch nicht gelernt zu sein. Sie ist unmittelbar messbar durch $U_0/N = N_1/N$. Ist der Lehrstoff homogen, dann stimmt a für alle N (bei unserem Versuch: 64) Lernelemente überein, und der Erwartungswert (die theoretische Anzahl) der nach k Lernversuchen noch nicht bekannten Vokabeln ist

$$(5)\ U_{\text{th},k} = Nu_k = Nu_0(1-a)^k = U_0(1-a)^k$$

Diese Zahl ist messbar durch die nach (1) ermittelte Zahl U_k. Aus den Beobachtungsgrößen k und N_k kann man also mittels der modellgestützten Prognose (5) unter Voraussetzung dieses Modellansatzes, d.h. der Annahme

$$(6)\ U_{\text{th},k} \approx U_k$$

den Modellparameter a näherungsweise – durch Gleichsetzung von (5) und (1) – bestimmen zu

$$(7)\ a \approx 1 - (U_k/U_0)^{1/k} =: a_2(k)$$

Für das Komplement dieses Messwerts gilt

$$(8)\ 1 - a \approx 1 - a_2(k) = (U_k / U_0)^{1/k} = ({}_{i=1}\Pi^{\kappa}\ U_i/U_{i-1})^{1/k} = ({}_{i=1}\Pi^{\kappa}\ (1-a_1(i)))^{1/k}$$

Das nach (8) ermittelte Komplement der Lernwahrscheinlichkeit ist also der geometrische Mittelwert der ersten k nach (2) bestimmten Komplemente.

Auch die Bestimmung der (mittleren bzw. als konstant angesehenen) Betrachtungszeit τ eines Kärtchens kann getrennt für die einzelnen Durchgänge erfolgen, wobei (wegen der abnehmenden Zahl noch zu betrachtender Kärtchen) eine wachsende Messwertabweichung vom Erwartungswert zu erwarten ist. Beim ersten Durchgang wird die Zeit t_1 für die Bearbeitung aller N Kärtchen verwendet, beim späteren, k+1-ten Durchgang die Zeit $t_{k+1} - t_k$ für die Bearbeitung der U_{k-1} Kärtchen, die auch beim k-ten Durchgang noch nicht ausgeschieden wurden, weil sie am Schluss des k-1-ten Durchgangs noch unbekannt waren. Analog zu (2) erhält man damit für die (mittlere) Beschäftigungszeit τ mit einem Lernelement, gemessen bei seinem k-ten Angebot

$$(9a)\ \tau \approx t_1 / N =: \tau_2(1)$$

$$(9b)\ \tau \approx (t_{k+1} - t_k) / U_{k-1} =: \tau_2(k+1)$$

Analog zu (3) kann auch die mittlere Betrachtungszeit für die bis zum Ende des k-ten Durchgangs erfolgten Betrachtungen berechnet werden. Für $k = 1$ erhält man auf diese Weise denselben Wert wie nach (9a), d.h. es gilt $\tau_1(1) := \bar{\tau}(1)$. Bei jedem späteren, k+1-ten Durchgang werden nur noch die beim k-ten Durchgang nicht herausgelegten, weil zu dessen Anfang noch unbekannten U_{k-1} Kärtchen betrachtet. Bis zum Schluss des k+1-ten Durchgangs erhält man damit allgemein

$$(10)\ \tau \approx t_{k+1} / (N + \sum_{i=0}^{k-1} U_i) =: \bar{\tau}(k+1)$$

Dies ist offensichtlich der gewichtete, arithmetische Mittelwert der nach (9a,b) bestimmten Durchschnittswerte bei den einzelnen Durchgängen.

Bei der Bestimmung der Lernleichtigkeitswerte

$$(11)\ \lambda(\mathrm{Vp}) := a(\mathrm{Vp})/\tau(\mathrm{Vp})$$

jeder Versuchsperson Vp sind dabei als Zähler und Nenner je entweder die bei ihnen für die einzelnen Durchgänge gemessenen Werte nach (2) und (9a,b) oder die jeweiligen Mittelwerte für die ersten k Durchgänge nach (3) - oder (7) - und (10) einzusetzen. Die Gültigkeit der gemachten Modellannahmen vorausgesetzt konvergieren dabei Zähler, Nenner und Quotient für unbeschränkt wachsendes k.

Im Falle der Proportionalität von a und τ müsste sich (im Rahmen der Messgenauigkeit) für die von verschiedenen Versuchspersonen (Vp) investierten Betrachtungszeiten τ(Vp) derselbe Lernleichtigkeitswert ergeben. Er muss nach der informationspsychologischen Theorie mit

$$(13)\ \lambda = \eta C_v / I$$

übereinstimmen (Frank, 1996, S. 120). Wenn (wie für unsere Fallstudie anzunehmen) die verschiedenen Versuchspersonen in ihrer Lerngeschwindigkeit C_v übereinstimmen, und wenn zwischen ihnen auch Übereinstimmung im gesamten subjektiven Informationsgehalt I der zu lernenden Lehrstoffelemente besteht, dann folgt aus einer Übereinstimmung der Lernleichtigkeiten, dass die verschiedenen Lernstrategien gleiche Effikanz haben, dass also jede Vp ihre Lernfähigkeit zum gleichen Prozentsatz für die Lehrstoffaneignung nutzt.

4. *Theoriegeleitete Datenauswertung.*

Die Spalten (1) und (2) in Bild 2 enthalten die noch ohne Modellbezug unmittelbar gewonnenen Daten, nämlich die Zeiten t_k, welche die Vp L.S. (oben) bzw. R.S. (unten) vom Beginn des ersten bis zum Abschluss des k-ten Durchgangs nutzte. Die vor Versuchsbeginn verstrichene, unbekannte Lernzeit, in welcher das im ersten Durchgang der $N = 64$ Kärtchen festgestellte und durch Beiseitelegen von N_1 Kärtchen bekundete Vorwissen erworben wurde, ist durch $k = 0$ gekennzeichnet. Die Werte N_k in Spalte (3) geben an, wieviele Kärtchen während des k-ten Durchgangs beiseitegelegt wurden; man erhält also N_k durch Zählen der Ziffern k-1 in der Spalte (3) von Bild 1, also ebenfalls noch ohne Modellbezug. Dies gilt auch für die Spalte (4); denn U_k gibt zunächst nur an, wieviel Kärtchen am Ende des Durchgangs k+1 noch nicht beiseitegelegt waren; unter

der einzigen Voraussetzung, dass die Vp die Anweisung richtig befolgte, ist dies die Zahl der am Ende des Durchgangs k noch nicht beherrschten Vokabeln. Schließlich ergibt sich auch die Spalte (5) ohne theorieabhängige Rechnung nach Gleichung (9a,b) aus den Spalten (2) und (4). In Spalte (5) fällt auf, dass die durchschnittliche Betrachtungszeit eines Lernelements bei beiden Versuchspersonen unter der Gegenwartsdauer (ca. 10 sek) liegt oder (bei je nur einem Durchgang) diese höchstens geringfügig überschreitet, und dass sie tendenziell im Laufe der Durchgänge etwas anwächst. Unterstellt man die Zufälligkeit dieses Sachverhalts, dann ist die Berechnung der (gewichteten) Mittelwerte für Spalte (6) nach Gleichung (10) sinnvoll.

Erst für die Berechnung der Werte für die Spalten (7) - (9) werden die Voraussetzungen des ALZUDI-Lernmodells in zunehmendem Umfang benutzt. Sie gehen damit indirekt auch in die Lernleichtigkeitsberechnungen ein. Dabei ergeben sich die stark schwankenden Lernleichtigkeitsmesswerte der einzelnen Durchgäng durch Division der in derselben Zeile stehenden Werte $a_1(k)$ / $\tau(k)$, schematisch: (10) = (7)/(5). Die Spalte (11) wurde nach dem Schema {[(8)+(9)]/2}/(6) berechnet.

Die für Bild 2 vorgenommene, genauere Auswertung der Urdaten bestätigt die eingangs gemachte Feststellung, dass die Vp L.S. „flüchtiger“, d.h. mit durchweg kürzeren „Lehrschritt-Dauern“ $\tau(k)$, arbeitete als Vp R.S. Erwartungsgemäß erreichte L.S. damit in den meisten Durchgängen eine geringere Lernwahrscheinlichkeit, als sie R.S. im ungünstigsten Fall (15,34%) erreichte. Bei beiden Durchschnittsberechnungen kommt dies klar zum Ausdruck: L.S. lernte eine Vokabel bei einer Lerngelegenheit im Mittel mit der Wahrscheinlichkeit 12,46% bzw. 12,72% - gemittelt: 12,59 % - , R.S. mit der Wahrscheinlichkeit 18,92% bzw. 18,77% - gemittelt: 18,845. Nicht erwartet war bei der damaligen Versuchsdurchführung, dass sich das Verhältnis der Dauern der Lernanlässe im Verhältnis der bewirkten Lernwahrscheinlichkeiten getreu widerspiegeln könnte. (Dies ist theoretisch nicht *allgemein* möglich, da $a \leq 1$ aber τ nach oben unbeschränkt ist.) Es ist aber $6{,}71:9{,}01 \approx 0{,}7 \approx 12{,}59:18{,}845$. Die Lernleichtigkeit ist daher nicht durch Variation der „Gründlichkeit“ bzw. „Flüchtigkeit“ τ der Einzelbetrachtung der Lernelemente beeinflussbar und durch bestmögliche Wahl von τ optimierbar: sie beträgt bei jeder Vp trotz erheblich unterschiedlicher Betrachtungsdauern ungefähr 2%/sek (L.S.: 1,9%/sek, R.S.: 2,1%/sek - angesichts der Streuung bei den einzelnen Durchgängen offensichtlich eine Zufallsabweichung).

Das im vorangegangenen Beitrag (Frank 2001) entwickelte, im Kern deterministische Lernmodell begründet, dass im Intervall $i/C_K < \tau < i/C_v$ jeder Wert τ optimal ist. Die von L.S. und R.S. gewählten Werte liegen zweifellos in diesem Intervall. Denn bei (voraussetzbarer) vollständiger informationeller Akkomodation an das Repertoire der zuzuordnenden *Bedeutungen* der ILo-Vokabeln enthält jedes Element noch ld N = 6 bit *semantischer* Information. Da nur *passive* Vokabelbeherrschung angestrebt wurde, reichte es daher aus, von den syntaktischen Merkmalen der einzelnen, ILo-Wörter bildenden Buchstabenfolgen, also von ihrer syntaktischen Information, weitere 6 bit zu lernen, um sie wiedererkennen und ihnen die Bedeutung zuordnen zu können. Der subjektive *Mindest*informationsgehalt eines Lernelements (Vokabel) betrug daher 12 bit.

Eine *obere Grenze* wäre der Informationsgehalt einer Vokabel, deren *aktive* Beherrschung erlernt werden soll. Da die mittlere Länge der ILo-Wörter in Bild 1 knapp 4,2 Buchstaben beträgt, erhält man durch Übertragung von - mit dem Weltnerschen Rateverfahrens früher (Frank, 1984, S. 181) gewonnenen - empirischen Ergebnissen rund 11 bit syntaktischer Information, zusätzlich zu den jedenfalls zu lernenden 6 bit semantischer Information. Demnach kann die mittlere Lehrstoffinformation einer Vokabel unserer Fallstudie zu 12 bit $\leq i <$ 17 bit abgeschätzt werden. Die Apperzeptionsschnelle der beiden Versuchspersonen wurde nicht bestimmt. Da es sich um Studierende handelte, lag er fast sicher über 16 bit/sek, wahrscheinlich (Frank/Wagner, 1982, S. 77) bei etwa 18 bit/sek. Daraus und mit der Lernschnelle C_v = 0,7 bit/sek berechnen sich die Optimalitätsgrenzen für τ zu (12/18 ≈) 0,7 sek < τ < 17 (≈ 12/0,7) sek im Optimalfall vollständig abgeschlossener informationeller Akkomodation und Minimierung der beachteten syntaktischen Information. Im Extremfall des Erwerbs der auch aktiven Vokabelbeherrschung käme man auf (17/18 ≈) 0,9 sek < τ < 24 (≈ 17/0,7) sek. Die Tabelle von Bild 2 ergibt, dass jedenfalls die Betrachtungszeiten der einzelnen Vokabelkärtchen von jeder Vp in das Optimalitätsintervall gelegt wurden. (Die berechneten Grenzen sollten bei objektivierter Lehrstoffdarbietung beachtet werden, wenn der Lerner nicht selbst die Darbietungsdauer τ beeinflussen kann.)

Obgleich das Datenmaterial zweifellos viel zu gering ist, als dass es weiterreichende Schlüsse zuließe, sei abschließend eine Ausweitung der Betrachtung unter Zugrundelegung des komplexeren Psychostrukturmodells der Informationspsychologie erlaubt. Dieses überschreitet die Einschränkungen des ALZUDI-Lernmodells, insofern es durch Unterteilung des vorbewussten Gedächtnisses in ein Kurzgedächtnis und ein Langgedächtnis (Riedel, 1967a,b, wertet sein Datenmaterial sogar aufgrund eines *drei*stufigen Gedächtnismodells aus) auch die Berücksichtigung von Vergessen und Überlernen ermöglicht, also Behaltensteste sinnvoll macht. Zwar finden sich im informationspsychologischen Schrifttum Argumente für eine Einlerngeschwindigkeit ins Langgedächtnis in der Größenordnung $C_{v,l}$ = 0,1C_v, jedoch kein Hinweis darauf, ob dieses Einlernen (a) parallel mit dem Einlernen ins („provisorische") Kurzgedächtnis erfolgt und mit diesem endet, oder ob es (b) seriell, d.h. nur über das Kurzgedächtnis, nicht unmittelbar aus dem Kurzspeicher geschieht, so dass also nur ins Langgedächtnis gelangt, was schon provisorisch gelernt wurde, und nur solange es sich noch im Kurzgedächtnis befindet, oder ob (c) das Langgedächtnis aus beiden Quellen lernt.

Von den je Z = 35 während des Lernversuchs *zu*gelernten (nicht zum Vorwissen gehörenden) Vokabeln beherrschte im Behaltenstest L.S. noch B(L.S.) = 6, d.h. 17%, R.S. B(R.S.) = 9, d.h. 26%. Geht man von einer Vergessensgeschwindigkeit aus dem Kurzgedächtnis von etwa 1/3 pro Stunde, aus dem Langgedächtnis von etwa 1/9 pro Jahr aus (vgl. z.B. Frank, 1996, Bild 2.4), dann kann man unterstellen, dass während der 4 Wochen zwischen Versuchschluss und Behaltenstest *alles* nur ins Kurzgedächtnis Eingelernte und *nur* dieses vergessen wurde, so dass der Behaltenstest misst, wieviel ins Langgedächtnis gelangte, nämlich die Information B(Vp)•i. Dies ist jeweils der angegebene Prozentsatz der bis zum jeweils vorletzten Durchgang ins Kurzgedächtnis eingelernten Information Z•i. Er übertrifft bei beiden Lernern erheblich die im informationspsychologischen Schrifttum unterstellten $C_{v,l}/C_v \approx$ 10%. Der Vergleich muss allerdings wegen der unterschiedlichen Einlernzeiten korrigiert werden.

Ins Kurzgedächtnis gelangte die Information mit der Geschwindigkeit ηC_v während $L = U_0 + ... + U_{k-1}$ Lerngelegenheiten der durchschnittlichen Dauer τ, nämlich während der Beschäftigung mit je einem jeweils noch nicht gelernten Lernelement. Es gilt daher

$$(12)\ \eta C_v L \tau = Zi$$

Aus L(L.S.) = 303, L(R.S.) = 212 und den mittleren Darbietungszeiten 6,77 sec bzw. 9,17 sec errechnet sich ein Verhältnis der Effikanzwerte der beiden Lerner bzw. ihrer Lernweises von 0,95 : 1. Beide lernten also mit einer wohl übereinstimmenden Effikanz von 0,3 bis 0,4, wie man unter Verwendung der Grenzen i = 12 ... 17 bit und der als übereinstimmend anzunehmenden Lerngeschwindigkeit 0,7 bit/sec berechnet.

Die B ins Langgedächtnis aufgenommenen Vokabeln konnten dorthin (paralleles oder kombiniertes Einlernen unterstellt) schon während derselben L Lerngelegenheiten gelangen, teilweise aber auch noch während der insgesamt Z Darbietungen der schon provisorisch gelernten und daher diesmal ausgeschiedenen Elemente, was die Lernzeit auf $(L+Z)\tau$ verlängert. (Bei Unterstellung eines kombinierten Einlernens in beide Gedächtnisstufen wäre die Lernzeit noch länger.) Hier gilt also

$$(13)\ \eta_l C_{v;l}(L+Z)\tau = Bi$$

Aus (12) und (13) ergibt sich als Verhältnis $\eta_l C_{v,l} / \eta C_v$ für L.S. 15%, für R.S. 22%. Wenn eine Revision der theoretischen und empirischen Basis des schon konventionell benutzten Verhältniswerts $C_{v;L}/C_v \approx$ 10% keine Verdoppelung rechtfertigt, und man keinen Grund für die Annahme einer höheren Effikanz der Langgedächtniskomponente beim selben Lernprozess findet, dann würde das Ergebnis der Fallstudie *gegen die erste* der drei genannten möglichen Zusammenfügungen von Kurz- und Langgedächtnis sprechen, also statt für eine Parallelität eher für die Möglichkeit, dass ins Langgedächtnis Aufgenommenes zuvor schon Kurzgedächtnisinhalt war (so dass ins Langgedächtnis noch während der Behaltenszeit im Kurzgedächtnis eingelernt werden kann).

Die Fallstudie zeigt ferner tendenziell einen bei längerer Betrachtungszeit τ größeren Einlernerfolg ins Langgedächtnis. Dies zeigt sich deutlich, wenn man die Daten auf die je Z = 35 Vokablen reduziert, welche *nach* dem Lernversuch, aber nicht schon vorher bekannt waren, also ins Langgedächtnis eingelernt werden konnten, und wenn man dem Behaltenstest entnimmt, welche davon tatsächlich nicht nur „provisorisch" gelernt wurden. Die (gegenüber dem Einlernen ins Kurzgedächtnis wieder um 35 zu vergrößernde) Zahl der Lernanlässe (190 + 35 bzw. 147 + 35) kann aus Bild 1 (ebenso wie vorher für den gesamten Lerntest) entnommen werden. Auf sonst gleichem Wege erhält man nun als mittlere Einlernwahrscheinlichkeit ins *Langgedächtnis* für L.S. rund 2,9%, für R.S. rund 5,4%, das sind 23% bzw. 29% der oben bestimmten Lernwahrscheinlichkeitswerte. Da aber *dieselben* mittleren τ-Werte zugrundezulegen sind, ist im Falle des Langgedächtnisses die Proportionalität - und damit die Konstanz der Lernleichtigkeit - anzweifelbar: für L.S. kommt man auf $\lambda \approx$ 0,4%/sek, für R.S. auf $\lambda \approx$ 0,6%/sek. Wenn diese Überlegenheit kein Zufallsergebnis ist, könnte es als Hinweis

gedeutet werden, dass „gründlicheres" Lernen (längeres τ) bei *gleicher Gesamtlernzeit* zwar nicht kurzfristig (für das Einlernen ins Kurzgedächtnis), wohl aber langfristig vorzuziehen ist, weil es mehr Überlernen und daher langsameres Vergessen bewirkt. Ein dies erklärendes theoretisches Modell wäre zu entwickeln.

Schrifttum

Frank, Helmar (1966): *Ein Ansatz zum algorithmischen Lehralgorithmieren.* In: H.Frank (Hsg.): Lehrmaschinen in kybernetischer und Pädagogischer Sicht Bd. 4. Klett / Oldenbourg, Stuttgart u. München 1966, S. 70 – 112. Nachdruck in Meder/Schmid/Barandovská/Lánská/Pinter 1973/99, Bd. 1, 314-356

Frank, Helmar (1984): *Zur „Reife"-Abhängigkeit der Lernwahrscheinlichkeit von Vokabeln.* GrKG/H 25 (1984) /1, 177 - 185. Nachdruck in Meder/Schmid/Barandovská/Lánská/Pinter 1973/99, Bd. 6, 459 - 467

Frank, Helmar (1996, [2]1999): *Klerigkibernetiko / Bildungskybernetik.* KoPäd München, 1996, [2]1999. Nachdruck in Meder/Schmid/Barandovská/Lánská/Pinter 1973/99, Bd. 11, 5 - 239

Frank, Helmar (2001): *Lehrstoffinformation und Lernwahrscheinlichkeit.* GrKG/H 41(2001)/3, 2001, 87 – 102.

Frank, H., und Klaus-Dieter Graf (1967): *Über eine formale Didaktik.* Ztschr. f. erziehungswissensch. Forschung 1, 1967, 28 – 34. Nachdruck in Meder/Schmid/Barandovská/Lánská/Pinter 1973/99, Bd. 3, 123 – 130.

Frank, H., und Hubert Wagner (1982): *Messsung der Apperzeptionsgeschwindigkeit mit einem Experimentalfilm.* GrKG/H 23/2, 1982, 73 – 79. Nachdruck in Meder/Schmid/Barandovská/Lánská/Pinter 1973/99, Bd. 6, 599 – 615.

Meder/Schmid/Barandovská/Lanská/Pinter (Hsg.): Kybernetische Pädagogik / Klerigkibernetiko, Bd. 1-4, 1973; 5, 1974, 6-8, 1993; 9, 1995; 10, 1997; 11, 1999.

Molter, Ullrich (1978): *Die Sprachverständnisprüfung der Gesellschaft für sprachgrenzübergreifende europäische Verständigung (Europa-Klub) e.V.*. Eŭropa dokumentaro 18, 1998, 10 – 13.

Riedel, Harald (1964a): *Empirische Untersuchung zu einem informationspsychologischen Gedächtnismodell.* GrKG/H 8/1, 1967, 1 – 13. Nachdruck in Meder/Schmid/Barandovská/Lánská/Pinter 1973/99, Bd. 4, 777-789.

Riedel, Harald (1964b): *Die Bestimmung der Speicherdaten und Zerfallskonstanten für ein informationspsychologisches Gedächtnismodell.* GrKG/H 8/1, 1967, 14-22 Nachdruck in Meder/Schmid/Barandovská/Lánská/Pinter 1973/99, Bd. 4, 790 – 705.

Weltner, Klaus (1964): *Eine vergleichende Untersuchung von Lernleistung und Erinnerungsfestigkeit bei programmiertem Unterricht und Direktunterricht.* In Frank, H. (Hsg.), Lehrmaschinen in kybernetischer und pädagogischer Sicht, Bd. 2, Klett/Oldenbourg, Stuttgart u. München, 1964, S. 11 – 19. Nachdruck in Meder/Schmid/Barandovská/Lánská/Pinter 1973/99, Bd. 10, 444- 452.

Eingegangen: 2001-10-21

Anschrift des Autors: Prof. Dr. Dr.h.c. Helmar Frank, KleinenbergerWeg 16a, D-33100 Paderborn

Lernprobablo kaj prezentaddaŭro (Resumo)

Estu τ la daŭro, dum kiu lernelemento estas prezentata kaj rigardata celante apercepton kaj lernon, kaj $a(\tau)$ la probablo, ke ĝi fakte estas lernata pro ĉi tiu okazo. Tiam a, estante limigita per la maksimumo 1, ja ne povas ĝenerale kreski proporcie al τ, sed ĝi ja proporcias al la prezentaddaŭro, se ĉi tiu *superas* la tempon necesan por apercepti la lernelementon, kaj *malsuperas* la necesan tempon por ĝin lerni. Tio sekvas el determinisma teorio jam publikigita en Frank 2001 kaj estas empirie konfirmata en piloteksperimento. La lernfacileco $\lambda = a/\tau$ do estas en tiu ĉi natura tempointervalo de lernokazo konstanta – kaj *maksimuma*. $1/a$ estas la ekspektvaloro de la ripetoj ĝis la lernado estos okazinta. Do la mezume bezonata lerntempo estas *minimume* $\tau \bullet 1/a = 1/\lambda$. Maksimuma lernfacileco estas do optimuma laŭ la kriterio de minimuma lerntempo. Sekve ĉiu prezentaddaŭro inter la minimume bezonataj tempoj por la aperceptado kaj por la lernado de lernelemento estas por ĝi optimuma.

grkg / Humankybernetik
Band 42 · Heft 4 (2001)
Akademia Libroservo / IfK

Ein logischer Rahmen für die Antwortanalyse in Lehrprogrammen

von Alfred SCHREIBER, Flensburg (D)

aus dem Institut für Mathematik und ihre Didaktik, Universität Flensburg

1. *Einleitung und Zielsetzung*

Interaktive Lehrprogramme bieten den Teilnehmern (Schülern, Adressaten) gewöhnlich Aufgaben an, deren Lösungen (Antworten) untersucht und bewertet werden. Die dabei ins Spiel kommende Antwortanalyse hat eine lokale und eine globale Funktion: Innerhalb einer Aufgabe ermöglicht sie die Steuerung des Dialogs (Ablauflogik und Kommentierung, ECKEL 1989). Im größeren Zusammenhang der Makrostruktur (FRANK 1967) können die Einzeldaten in ein Adressatenmodell einfließen und so das Unterrichtsgeschehen im Ganzen beeinflussen (vgl. etwa VASSILEVA 1990).

Antwortanalyse spielte in der „klassischen" Lehrprogrammierung noch bis Anfang der 90-er Jahre eine zentrale Rolle (ALESSI/TROLLIP 1991). Das hat sich geändert, seitdem Hypertext, Multimedia und vor allem die „konstruktivistische" Zurückdrängung von Lehrfunktionen den Marktplatz beherrschen. Dazu passt, dass Anwender von Autorensystemen oft nicht einmal die meist ohnehin spärlichen Strukturen nutzen, die darin für Zwecke der Antwortuntersuchung bereitstehen. Dabei kann die Antwortanalyse maßgeblich zur Qualität auch solcher Produkte beitragen, die neueren Ideen zur Gestaltung von „Lernumgebungen" verpflichtet sind. In SCHREIBER 1998 ist dies ausführlich dargelegt und für die praktische Entwicklungsarbeit im Detail umgesetzt.

Im folgenden soll dazu als theoretische Grundlage ein formales Modell der Antwortanalyse systematisch entwickelt werden. Zwei neue Resultate werden in diesem Rahmen vorgestellt: erstens die Charakterisierung aller Prüfsequenzen zu gegebener Bewertungsskala mit Hilfe eines „Schachtelkriteriums" (Satz 1), sowie zweitens ein einheitliches und allgemeines Verfahren für die Analyse von Zuordnungsaufgaben[1] (Sätze 2 und 3). Damit ist dieses Aufgabenformat vom theoretischen Standpunkt aus erschöpfend behandelt.

[1] hier verstanden als eine auch Multiple-Choice-Varianten umfassende Klasse von Interaktionen. – Die Analyse alphanumerischer Antworten ordnet sich zwar ebenfalls in das hier vorgestellte allgemeine Modell ein (vgl. SCHREIBER 1998), wird jedoch wegen der Spezialprobleme des *toleranten Prüfens* (u.a. mittels Approximate-String-Matching-Algorithmen) im weiteren nicht behandelt. Relevant sind in diesem Zusammenhang die beachtlichen Fortschritte, die auf dem Gebiet des „Combinatorial Pattern Matching" in den letzten Jahren erzielt wurden (vgl. etwa STEPHEN 1994).

2. *Ein allgemeines formales Modell*

Zu einer Aufgabe (beliebigen Typs) bilden wir den zugehörigen *Antwortraum A* als (nichtleere) Menge aller Antworten, welche über die Eingabe-Schnittstelle des Lehrprogramms realisierbar sind. Eine *Antwortanalyse* kann dann als eine Funktion $\alpha: A \to V$ aufgefasst werden, die zu jedem $x \in A$ einen *Antwortwert* v aus einer Wertemenge V effektiv berechnet. Es ist sinnvoll, α als surjektiv vorauszusetzen (um überflüssige Werte in V auszuschließen); ferner enthalte V stets mindestens den Antwortwert R (für ‚Richtig'). – Im einfachsten Fall ist $V = \{R,F\}$ (wobei F für ‚Falsch' steht); doch schon bei einer Multiple-Choice-Aufgabe, etwa vom Typ „1 aus 4", ist es zweckmäßig, den Wert ‚Falsch' in F1, F2, F3 einzuteilen, um so dem Schüler differenzierte Rückmeldungen zu den Distraktoren geben zu können. In der Praxis genügen meist endlich viele Antwortwerte $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Kommt es auf deren Reihenfolge an, so sprechen wir von einer *Bewertungsskala* und notieren: $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$; zweckmäßigerweise setzt man $v_1 = R$.

Die Menge A wird gewöhnlich in einer an der Bewertungsskala ausgerichteten Schrittfolge durchmustert. Eine nichtleere Teilmenge X von A, in der die aktuell eingegebene Antwort gesucht wird, heiße in dem Zusammenhang *Prüfbereich*, wenn die Zugehörigkeit zu X durch eine berechenbare Eigenschaft (Indikatorfunktion) beschrieben werden kann. Eine solche Eigenschaft werde in Anlehnung an ECKEL 1989 *Prüfschlüssel* genannt. Mit jedem Element v_i einer n-stufigen Bewertungsskala lässt sich die Menge A_i aller $x \in A$ mit $\alpha(x) = v_i$ eindeutig assoziieren. Sämtliche Teilmengen A_i – im folgenden *spezifische Prüfbereiche* genannt – bilden eine Partition (Klasseneinteilung) von A, d.h. jede Antwort gehört zu genau einem der $A_1, A_2, \ldots, A_n$, die somit in beliebiger Reihenfolge durchmustert werden können. In der Praxis erweist sich dies, entgegen erstem Anschein, nur selten als Vorteil, da die Bedingung, dass die Prüfbereiche disjunkt sein sollen, zu vergleichsweise komplizierten Prüfschlüsseln führt. Verzichten wir auf Disjunktheit, so kommen wir zu einfacheren Schlüsseln bzw. Prüfbereichen, müssen nun aber auf die Reihenfolge ihrer Durchmusterung achten (was im übrigen unproblematisch ist, da die betreffende Prüfschleife des Programms in jedem Fall auf eine Sequenzierung zurückgreift).

Die extremste Abweichung von der Disjunktheit entsteht durch Verwendung der folgenden *komplettierten Prüfbereiche* B_i, definiert durch $B_i = A_1 + \ldots + A_i$ $(i = 1,2,\ldots, n)$. Hier umfasst jeder Bereich seinen Vorgänger, und wir erhalten eine aufsteigende, den ganzen Antwortraum ausschöpfende Kette: $A_1 = B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots \subseteq B_n = A$. Das zugehörige Mengendiagramm (Bild 1 zeigt den Fall $n = 4$) erinnert an eine Zielscheibe, deren Ringe von innen nach außen angeordnet sind. Tatsächlich liefern die Mengen B_i in dieser Folge dasselbe Ergebnis wie die spezifischen Prüfbereiche A_i, d.h. wird eine Antwort x das erste Mal in B_i gefunden, so gilt $\alpha(x) = v_i$ (x

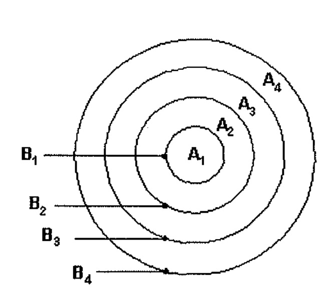


Bild 1. Zielscheibenmodell

liegt nämlich in keinem A_k mit $k < i$, und es bleibt somit nur $x \in A_i$). – Dass eine Analyse nach dem „Zielscheibenmodell" die Konstruktion von Prüfschlüsseln erleichtert, lässt sich leicht an Einzelbeispielen illustrieren (vgl. die ausführliche Diskussion einer Multiple-Choice-Aufgabe vom Typ „3 aus 5" in SCHREIBER 1998, S. 162 f. und 167). Das in Abschnitt 4 für Zuordnungen aufgestellte allgemeine Resultat wird dies in mehr grundsätzlicher Weise belegen.

Die Frage liegt nahe, welche Teilmengenfolgen bei der Antwortanalyse dasselbe Ergebnis liefern wie die spezifischen bzw. die komplettierten Prüfbereiche. – Zunächst sind die betreffenden Folgen begrifflich zu präzisieren.

Definition. Eine Folge $X_1, X_2, \ldots, X_n$ von Teilmengen von A heiße *Prüfsequenz für die Bewertungsskala* $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ wenn gilt:

(i) $X_1 \cup \ldots \cup X_n = A$,

(ii) $X_i \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_{i-1}) \subseteq A_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

Die Forderung (i) sichert, dass eine Antwort in jedem Fall gefunden wird. Mit (ii) wird erreicht, dass eine zum ersten Mal in X_i gefundene Antwort den Wert $v_i \in V$ erhält. – Offenbar sind die Folgen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und $B_1, B_2, \ldots, B_n$ im Sinne dieser Definition Prüfsequenzen für $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Der folgende Satz liefert eine vollständige Charakterisierung aller Prüfsequenzen für eine vorgegebene Bewertungsskala.

Satz 1. Die Folge $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ist eine Prüfsequenz für $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. genau dann, wenn $A_i \subseteq X_i \subseteq B_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt. –

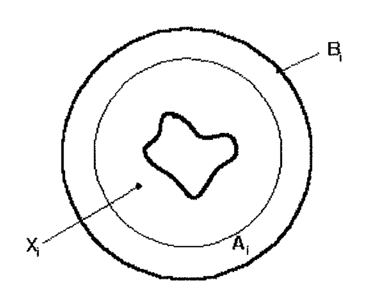


Bild 2: Schachtelbedingungen für den *i*-ten Bereich einer allgemeinen Prüfsequenz

Die Prüfbereiche gültiger Sequenzen sind demnach zwischen spezifische und komplettierte Prüfbereiche eingeschachtelt: In einem X_i darf keine Antwort mit Wert v_i fehlen; es dürfen aber auch nur Antworten mit Werten der gegebenen Skala vorkommen. Bild 2 zeigt die „allgemeine Lage" solcherart eingeschachtelter Bereiche (grau).

Beweis von Satz 1. – a) Zunächst soll gezeigt werden, dass das Schachtelkriterium hinreichend ist. Wegen der Surjektivität von $\alpha\colon A \to \{v_1,\ldots, v_n\}$ gilt $X_i \supseteq A_i \neq \emptyset$, die fraglichen Prüfbereiche sind somit sämtlich nichtleer. Da ferner $A \supseteq X_1 \cup \ldots \cup X_n \supseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n = A$ gilt, ist Eigenschaft (i) der obigen Definition erfüllt. Auch die Eigenschaft (ii) lässt sich direkt bestätigen: $X_i \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_{i-1}) \subseteq B_i \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{i-1}) = B_i \backslash B_{i-1} = A_i$.

b) Nun sei umgekehrt $X_1, X_2,\ldots, X_n$ eine Prüfsequenz für $(v_1, v_2,\ldots, v_n)$. Wir zeigen die beiden Inklusionen (1): $X_i \subseteq B_i$ und (2): $A_i \subseteq X_i$ jeweils für alle $i = 1, 2,\ldots, n$.

Der Beweis zu (1) wird induktiv geführt. Dazu werde ein festes $i \geq 1$ und $X_k \subseteq B_k$ für alle $k < i$ vorausgesetzt (Induktionsannahme). Zu zeigen ist dann: $X_i \subseteq B_i$ (für dieses i). Eigenschaft (ii) obiger Definition besagt: $X_i \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_{i-1}) \subseteq A_i$. Addition von $X_1 \cup \ldots \cup X_{i-1}$ zu beiden Seiten dieser Inklusion liefert $X_i \subseteq A_i \cup X_1 \cup \ldots \cup X_{i-1}$. Wendet man die Induktionsannahme auf die $X_1,\ldots, X_{i-1}$ an, so ergibt sich: $X_i \subseteq A_i \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{i-1} = B_i$.

Den Beweis zu (2) führen wir durch Widerspruch. Es werde dazu indirekt ein Index i und eine Antwort $x_0 \in A_i$ angenommen, die nicht zu X_i gehört. Zunächst ist klar, dass dann $x_0 \notin X_1 \cup \ldots \cup X_{i-1}$, denn aus der oben bereits bewiesenen Inklusion (1) ergibt sich sofort: $X_1 \cup \ldots \cup X_{i-1} \subseteq B_1 \cup \ldots \cup B_{i-1} = B_{i-1} = A_1 + \ldots + A_{i-1}$ (eine zu A_i disjunkte Menge). Infolgedessen muss x_0 zu $X_{i+1} \cup \ldots \cup X_n$ gehören. Wählen wir nun den Index $m \geq i + 1$ mit $x_0 \in X_m$ minimal, so ist $x_0 \notin X_1 \cup \ldots \cup X_{m-1}$; andererseits gehört dann aber die Antwort x_0 wegen $X_m \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_{m-1}) \subseteq A_m$ (nach Eigenschaft (ii) der Definition) zum Prüfbereich A_m. Das ist, wegen $m > i$ und der paarweisen Disjunktheit der spezifischen Prüfbereiche, ein Widerspruch zu der ursprünglichen Annahme $x_0 \in A_i$. ◆

Den Abschluss dieses Abschnitts bilden einige Folgerungen aus Satz 1, die hier ohne Beweis mitgeteilt werden:

1. Sind die Folgen $X_1,\ldots, X_n$ und $Y_1,\ldots, Y_n$ Prüfsequenzen, so auch $X_1 \cup Y_1,\ldots, X_n \cup Y_n$ und $X_1 \cap Y_1,\ldots, X_n \cap Y_n$.

2. Ist $X_1,\ldots, X_n$ eine Prüfsequenz und ist $U_i := X_1 \cup \ldots \cup X_i$ für $i = 1,2,\ldots, n$, so ist auch $U_1,\ldots, U_n$ eine Prüfsequenz.

3. Ist jede zyklische Permutation der Folge $X_1,\ldots, X_n$ eine Prüfsequenz, so gilt $X_i = A_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

In den folgenden Abschnitten 3 und 4 wird ein abstraktes Modell für Zuordnungsaufgaben vorgestellt und eine dazu passende einheitliche Antwortanalyse entwickelt. Die Gültigkeit der darin verwendeten Prüfsequenz lässt sich mit Hilfe des Schachtelkriteriums (Satz 1) nachweisen.

3. *Zuordnungsaufgaben*

Der mathematische Begriff der (mehrdeutigen) Zuordnung ist allgemein genug, um eine große Klasse von Aufgabenformen – im folgenden *Z-Aufgaben* genannt – unter

sich zu fassen. Dazu gehören: Reihenfolgebildung (Anordnungsaufgaben), Klassenbildung, Entscheidungssequenzen, Zuordnungen im „herkömmlichen" Sinn, Multiple-Choice-Varianten „1 aus N" und „k aus N", u.a.m. – In SCHREIBER 1998 findet man eine eingehende Studie zu diesem Thema (S. 170-218), in der die Klassifikation sämtlicher Z-Aufgaben in zehn Basistypen aufgezeigt sowie zahlreiche Details zu den Fragen des didaktischen Entwurfs und der Aufgabenpräsentation behandelt werden. Daher können die weiteren Überlegungen darauf beschränkt bleiben, den formalen Rahmen für Z-Aufgaben soweit zu entwickeln, wie es zum Verständnis der allgemeinen Antwortanalyse für Zuordnungen (in Abschnitt 4) erforderlich erscheint.

Eine Zuordnung wird als ein paarer (auch: bipartiter) Graph $Z = (X, Y, K)$ aufgefasst, bestehend aus zwei nichtleeren disjunkten Eckenmengen X, Y sowie einer (ebenfalls nichtleeren) Menge K von Kanten. Eine (ungerichtete) Kante xy aus K verbindet ausschließlich „Links-Ecken" $x \in X$ mit „Rechts-Ecken" $y \in Y$. Die Eckenmengen werden als endlich vorausgesetzt und in der Form $X = \{x_1,\ldots, x_l\}$ und $Y = \{y_1,\ldots, y_r\}$ notiert. Wir können einen solchen Graphen in eindeutiger Weise durch seine *Strukturmatrix* beschreiben: d.i. eine Tabelle aus l Zeilen und r Spalten derart, dass in der i-ten Zeile und j-ten Spalte eine Eins steht, wenn die Ecke x_i mit der Ecke y_j durch eine Kante aus K verbunden ist, sonst eine Null. – Bild 3 zeigt das Schema einer Z-Aufgabe, bei der die Links-Ecken („Merkmale" a, b, c) zum Teil *mehrfach* (den als Rechts-Ecken modellierten „Dingen" 1, 2, 3, 4, 5, 6) zugeordnet werden können.

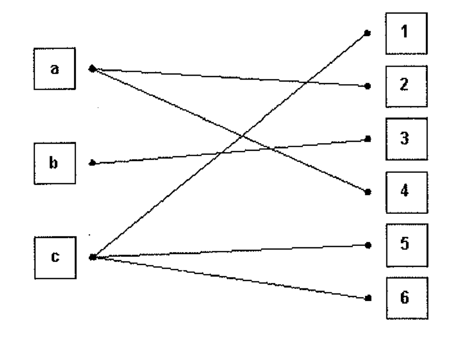


Bild 2. Z-Graph mit Eckenmengen $X = \{a,b,c\}$ und $Y = \{1,2,3,4,5,6\}$. Die zugehörige Strukturmatrix S lautet:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Im Kern läuft eine Z-Aufgabe darauf hinaus, einem Schüler die Eckenmengen X und Y (nebst inhaltlicher Problemstellung) darzubieten und ihn zur Eingabe einer passenden Kantenmenge K_0 aufzufordern. Die Antwortanalyse muss dann das vom Schüler eingegebene K_0 mit der *Lösung* vergleichen, d.h. mit der zu Z tatsächlich gehörenden Kantenmenge K.

Eine wichtige praktische Frage ist die, ob und wie – mittelbar über die Eingabeschnittstelle des Lehrprogramms – der Antwortraum A definiert ist. Im Extremfall ist A die Gesamtheit aller über X und Y möglichen $2^{lr}-1$ Kantenmengen. Häufig lässt sich jedoch dem Aufgabenkontext (direkt oder indirekt) entnehmen, dass *nur bestimmte* Kan-

tenmengen vom Schüler zu konstruieren sind. Eine solche mehr oder weniger liberale Restriktion werde *Kantenbedingung* genannt. Sie kann z.B. darin bestehen, dass von einer Ecke immer nur höchstens eine Kante ausgehen darf; oder dass die Anzahl k_0 der eingebbaren Kanten exakt angegeben wird (etwa bei Multiple-Choice-Aufgaben vom Typ „1 aus N": $k_0 = 1$), und ähnliches mehr.[2]

Hat der Graph einer Z-Aufgabe k Kanten und wird in der Aufgabenstellung die Kantenbedingung $k_0 = k$ mitgeteilt, so nennen wir die Aufgabe *definit* (die Anzahl einzugebender Kanten muss dann also mit der Kantenanzahl der Musterlösung übereinstimmen), andernfalls *indefinit*.

Wir müssen uns noch fragen, welche möglichen Antwortwerte für die Bewertungsskala einer Z-Aufgabe in Betracht kommen. Da es hier nicht um Differenzierungen von Antwortwerten gehen kann, die von den inhaltlichen Besonderheiten einer bestimmten Aufgabe abhängen, bleibt im allgemeinen Fall nur eine Einteilung, die sich als *Standard* für *alle* Z-Aufgaben eignet. Man überzeugt sich unschwer davon, dass die folgende symmetrische Skala dies für sämtliche zehn Basistypen von Z-Aufgaben leistet:

R : richtig
UR : unvollständig richtig (nur richtige Kanten, aber nicht alle)
RF : teilweise richtig, teilweise falsch (richtige und falsche Kanten)
UF : unvollständig falsch (nur falsche Kanten, aber nicht alle)
F : falsch

Natürlich sind von diesen Antwortwerten nicht in jedem Fall alle auch anwendbar. Zum Beispiel machen für eine Multiple-Choice-Aufgabe vom Typ „1 aus N" von den gegebenen Antwortwerten nur R und F einen Sinn, für eine Anordnungsaufgabe (umkehrbar eindeutige Zuordnung) sind es die Werte R, RF und F. Aber schon bei einer indefiniten Auswahl von „k aus N" Möglichkeiten sind alle fünf Skalenwerte interpretierbar.

Es ist von vornherein klar, dass die Antworten, die sich in einer beliebigen Z-Aufgabe realisieren lassen, im Prinzip auch analysierbar sind. Es liegt weniger auf der Hand, dass dies durch ein einheitliches und vergleichsweise einfaches Verfahren geleistet werden kann.

4. *Ein Verfahren für die Analyse von Zuordnungen*

Im folgenden soll eine Antwortanalyse für Z-Aufgaben entwickelt werden, die auf der Bewertungsskala (R, UR, RF, UF, F) aufbaut und in der Praxis für definite und indefinite Problemstellungen gleichermaßen leicht zu handhaben ist.

Der Grundgedanke beruht auf einem zweischrittigen Vorgehen:

(1) Zunächst wird die Eingabe K_0 des Schülers in eine Kantenbilanz umgesetzt und durch ein Paar (p, q) rationaler Zahlen zwischen 0 und 1 beschrieben. Die im Graphen Z

[2] Beiläufig sei hier auf die (eigentlich selbstverständliche, gleichwohl in der Praxis oft missachtete) Forderung hingewiesen, dass bei Z-Aufgaben in einem Lehrprogramm die Kantenbedingungen (evtl. auch deren Abwesenheit) mitzuteilen ist, da sonst dem Schüler nicht wirklich klar sein kann, woraus genau eine zulässige Antwort besteht (vgl. SCHREIBER 1998, S. 182 f.).

realisierbaren Kantenmengen werden damit in das Einheitsquadrat $E = [0,1] \times [0,1]$ abgebildet.

(2) Den Antwortwerten R, UR, RF, UF, F entsprechen bei dieser Abbildung geeignete Teilmengen von E, die sich daher als spezifische Prüfbereiche anbieten. Aus ihnen lässt sich eine Prüfsequenz gewinnen, deren Prüfschlüssel einfache booleschwertige Funktionen von p, q sind.

Im einzelnen: Sei K_0 die vom Schüler eingegebene Kantenmenge (Antwort). Wir betrachten den zugehörigen Graphen $Z_0 = (X, Y, K_0)$ und berechnen seine Strukturmatrix S_0. Die Abweichung von Musterlösung K und Schülerantwort K_0 lässt sich dann durch die Differenzmatrix $D = S - S_0$ wiedergeben. Außer Nullen können in D offenbar nur die Einträge 1 und −1 auftreten. Dabei bedeutet eine „1" eine in K_0 fehlende Kante, eine „−1" entsprechend eine überflüssige (unerwünschte) Kante in K_0.

Wir verabreden die folgenden Bezeichnungen:

k := Anzahl der Kanten in K (Einträge 1 in S)
k_0 := Anzahl der Kanten in K_0 (Einträge 1 in S_0)
n := Anzahl der fehlenden Kanten (Einträge 1 in D)
m := Anzahl der überflüssigen Kanten (Einträge −1 in D)

Die so definierten Größen stehen in folgender Beziehung:

$$k - k_0 = n - m$$

Diese *Bilanzgleichung* ist leicht einzusehen: Ergänzen wir nämlich die k_0 eingegebenen Kanten um die n fehlenden und entfernen die m überflüssigen Kanten, so erhalten wir die k in Z tatsächlich vorhandenen Kanten. – Es ist stets $k > 0$ und $k_0 > 0$. Für eine definite Z-Aufgabe ergibt sich wegen $k_0 = k$ aus der Bilanzgleichung: $n = m$.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun zu vorgegebener Antwort (hier repräsentiert durch S_0 bzw. die daraus gewonnenen Kennzahlen k_0, n, m) einen *Richtig-Anteil* p und einen *Falsch-Anteil* q berechnen, wobei $0 \leq p, q \leq 1$. Der Richtig-Anteil p ergibt sich einfach als Verhältnis der $k - n$ erzielten „Treffer" zur Gesamtanzahl k der vorhandenen Kanten; es ist also $p = 1 - n/k$. Bei der Definition des Falsch-Anteils müssen wir unterscheiden, ob die vorliegende Z-Aufgabe definit oder indefinit ist. Im definiten Fall ($k_0 = k$ und $n = m$) werden genau die „Nicht-Treffer" als überflüssige Kanten realisiert; ihr Anteil q beträgt somit n/k. Im indefiniten Fall gibt es maximal $lr - k$ Möglichkeiten zur Realisierung einer überflüssigen Kante (man beachte: lr = Höchstzahl von Kanten, welche die l Links-Ecken mit den r Rechts-Ecken verbinden). Für $k < lr$ erhalten wir daher den Falsch-Anteil $q = m/(lr - k)$. Für $k = lr$ kann es keine überflüssigen Kanten geben ($m = 0$), es ist also $q = 0$ zu setzen. –

Wir fassen die Ergebnisse zusammen:

Satz 2. Zu gegebener Z-Aufgabe mit l Links-Ecken, r Rechts-Ecken und k Kanten werde eine Antwort mit den Kennzahlen n, m realisiert. Dann gilt für die zugehörigen Richtig- und Falsch-Anteile p, q:

$$p = 1 - \tfrac{n}{k}$$

$$q = \begin{cases} \tfrac{n}{k} & \text{definit} \\ \tfrac{m}{rl-k} & \text{indefinit } k < lr \\ 0 & \text{indefinit } k = lr \end{cases}$$

Die Gesamtheit E^* der so berechenbaren rationalen Paare (p, q) liegt im Einheitsquadrat E. Im definiten Fall besteht sie aus $k + 1$ Punkten auf der Diagonalen zwischen $(0,1)$ und $(1,0)$. Es gilt dann $p + q = 1$.

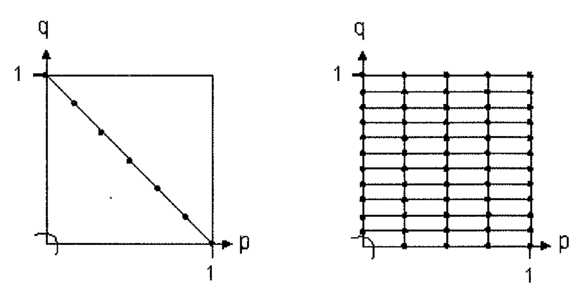


Bild 3. Mögliche Darstellungen der (endlichen) Menge E^* im definiten und im indefiniten Fall

Im indefiniten Fall verteilen sich je nach speziellem Aufgabentyp insgesamt bis zu $(k + 1)(lr - k + 1) - 1$ Punkte entlang bestimmter Rasterlinien. Der Punkt $(0,0)$ bleibt ausgespart. Bild 4 illustriert mögliche Verteilungen der Wertepaare (p, q) im definiten und indefiniten Fall.

Für die eigentliche Antwortanalyse sind nun Prüfbereiche (bzw. die zugehörigen Prüfschlüssel) und aus ihnen zu bildende Prüfsequenzen für die Bewertungsskala (R, UR, RF, UF, F) festzulegen. Da wir die vom Schüler als Antwort eingegebene Kantenmenge bereits in ein rationales Zahlenpaar $(p, q) \in E^*$ umgewandelt haben, ist es zweckmäßig, die Prüfbereiche von vornherein als Teilmengen von E^* aufzufassen. Dass dabei verschiedene Antworten vergröbernd auf dasselbe Wertepaar (p, q) abgebildet werden, stellt kein Problem dar – schließlich vergröbert die Antwortanalyse schon von sich aus stärker, indem sie die Antworten auf einen i.a. noch kleineren Wertevorrat (hier: von fünf Standardwerten) abbildet.

Prüfschlüssel für Teilmengen $X \subseteq E^*$ sollen im folgenden mit Hilfe booleschwertiger Indikatorfunktionen $\phi: E^* \to \{\texttt{True, False}\}$ formuliert werden, d.h. ϕ ist Prüfschlüssel für X, wenn gilt: $X = \{(p, q) \in E^* : \phi(p, q) = \texttt{True}\}$.

Das Hauptergebnis zur Antwortanalyse von Z-Aufgaben enthält der folgende

Satz 3. Die Prüfbereiche $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \subseteq E^*$ seien beziehentlich durch folgende

Prüfschlüssel $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5 : E^* \to \{\texttt{True, False}\}$ definiert:

$\pi_1(p, q) := ((p = 1) \text{ AND } (q = 0))$,

$\pi_2(p, q) := (q = 0)$,

$\pi_3(p, q) := (p > 0)$,

$\pi_4(p, q) := (q < 1)$

$\pi_5(p, q) := \texttt{True}.$

Dann gilt: $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ ist eine Prüfsequenz für die Bewertungsskala (R, UR, RF, UF, F).

Beweis: Seien $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 \subseteq E^*$, die spezifischen Prüfbereiche von R, UR, RF, UF, F. Wir haben nach Satz 1 lediglich zu zeigen, dass das Schachtelkriterium erfüllt ist, d.h. hier: $E_i \subseteq P_i \subseteq E_1 + \ldots + E_i$ für $i = 1,2,3,4,5$. – Offenkundig sind die folgenden Indikatorfunktionen ε_i geeignete Prüfschlüssel für die E_i:

$\varepsilon_1(p, q) := ((p = 1) \text{ AND } (q = 0))$,

$\varepsilon_2(p, q) := ((p < 1) \text{ AND } (q = 0))$,

$\varepsilon_3(p, q) := ((p > 0) \text{ AND } (q > 0))$,

$\varepsilon_4(p, q) := ((p = 0) \text{ AND } (q < 1))$,

$\varepsilon_5(p, q) := ((p = 0) \text{ AND } (q = 1))$.

Bei ε_2 und ε_4 wurde die (nach Definition der Antwortwerte UR und UF eigentlich erforderliche zusätzliche) AND-Verbindung mit $(p > 0)$ bzw. $(q > 0)$ fortgelassen, da diese Bedingungen jeweils durch den Ausschluss des Nullpunktes $(0,0)$ aus E^* zwangsläufig erfüllt sind.

Man hat unmittelbar: $E_1 = P_1$ und $E_5 \subset P_5 = E^*$. Ferner gilt $E_2 \subset P_2 = E_1 + E_2$; es ist nämlich $((p = 1) \text{ AND } (q = 0)) \text{ OR } ((p < 1) \text{ AND } (q = 0))$ nach dem Distributivgesetz (wertverlaufs)gleich zu $((p \leq 1) \text{ AND } (q = 0))$und wegen $(p \leq 1) = \texttt{True}$ auch zu $(q = 0)$, d.h. zum Prüfschlüssel für P_2. Auch für die restlichen Fälle bestätigt man in analoger Weise durch direktes Auswerten der booleschen Terme in den Prüfschlüsseln, dass $E_3 \subset P_3 = E_1 + E_2 + E_3$ und $E_4 \subset P_4 \subset E_1 + E_2 + E_3 + E_4$. (Bei den P_i handelt es sich somit – ausgenommen $i = 4$ – um die zu E_i gehörigen komplettierten Prüfbereiche.) ♦

Anmerkungen

1. Man kann sich den Nachweis der Schachtelbedingung auch geometrisch zurechtlegen, indem man die spezifischen Prüfbereiche als Teilmengen von E^* veranschaulicht. Dabei ist E_1 der Punkt $(1,0)$, E_2 der Durchschnitt von E^* mit der offenen Strecke zwischen $(0,0)$ und $(1,0)$, E_4 der Durchschnitt von E^* mit der offenen Strecke zwischen $(0,0)$ und $(0,1)$, E_5 der Punkt $(0,1)$ und E_3 die Menge aller übrigen Punkte von E^*. Damit wird z.B. die Inklusion $P_4 \subset E_1 + E_2 + E_3 + E_4$ sofort einsichtig, denn P_4 entsteht aus E^* durch Entfernen der kompletten Strecke $(0,1)$ bis $(1,1)$, während in $E_1 + E_2 + E_3 + E_4$ nur

der Punkt (0,1) fehlt.

2. Die Sätze 2 und 3 wurden so formuliert, dass die technische Realisierung des Verfahrens in einer höheren Programmiersprache ohne Umweg erfolgen kann. Die beteiligten Kantenmengen (Strukturmatrizen) lassen sich durch dynamische Arrays darstellen, aus deren Elementen die Richtig- und Falsch-Anteile p, q leicht zu gewinnen sind. Der Rest, d.h. die Abarbeitung der Prüfsequenz, ist dann nur noch eine verschachtelte bedingte Abfrage.

3. Auf E^* lassen sich Abstandsmaße einführen (was die Sprechweise von einem Antwortraum rechtfertigt). Definiert man den Abstand zweier Punkte $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in E^*$ durch $\frac{1}{2} p_1 - q_1 - (p_2 - q_2)$, so erhält man eine Pseudometrik („pseudo", weil verschiedene Punkte den Abstand 0 haben können; für die Details und den geometrischen Hintergrund vgl. SCHREIBER 1998, S. 203 f.). Der zwischen 0 und 1 liegende Abstand $f(p,q) := \frac{1}{2}(p - q + 1)$ eines Punktes (p,q) vom „schlechtesten" Punkt (0,1) lässt sich als Erfolgsquote deuten.

Schrifttum

Alessi, Stephen M. / Trollip, Stanley R.: *Computer-Based Instruction. Methods and Development.* 2nd edition, Allynand Bacon 1991

Eckel, Karl: *Didaktiksprache. Grundlagen einer strengen Unterrichtswissenschaft.* Böhlau-Verlag: Köln; Wien 1989

Frank, Helmar: Lehralgorithmen und Lehrautomaten. In: W. Kroebel (Hrsg.), *Fortschritte der Kybernetik.* Oldenbourg: München 1967

Schreiber, Alfred: Rezension von ECKEL 1989. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 22, 114-116 (1990)

Schreiber, Alfred: Eine Didaktik-Umgebung für adaptives Lernen (DUAL). Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft / Humankybernetik 33, 25-31 (1992).

Schreiber, Alfred: *CBT-Anwendungen professionell entwickeln.* Springer-Verlag: Berlin; Heidelberg; New York 1998

Stephen, Graham A.: *String Searching Algorithms.* World Scientific: Singapore 1994

Vassileva, Julita: A Classification and Synthesis of Student Modeling Techniques in Intelligent Computer-Assisted Instruction. In: Norrie et al. (eds.): *Computer Assisted Learning. Proceedings* ICCAL 90, 202-213. Springer-Verlag: Berlin; Heidelberg; New York 1990.

Eingegangen 2001-09-17

Anschrift des Verfassers: Univ.-Prof. Dr. Alfred Schreiber, Hauslücke 9, D-24999 Wees

A Logical Framework for the Response Analysis in Tutoring Systems (Summary)

This article deals with some general concepts and a formal model both related to the process of evaluating responses (student inputs in computer-assisted instruction). Two main results are established: 1. For any finite ordered scale of values to be assigned to student answers, theorem 1 gives a characterization of all „testing sequences" which cause the evaluation to yield correct outcomes. 2. According to this scheme, theorems 2 and 3 present, for a large class of frames („matching problems"), a uniform algorithmic method for response judgment.

grkg / Humankybernetik
Band 42 · Heft 4 (2001)
Akademia Libroservo / IfK

Eŭropaj lingvoj kaj interlingvoj

de Věra BARANDOVSKÁ-FRANK, Paderborn (DE)

el la Instituto pri Kibernetiko

1. *Eŭropaj etnolingvoj*

Por plifaciligi niajn prikonsiderojn, ni akceptu Eŭropon en ĝiaj geografiaj limoj, ligantaj ĝin al Azio pere de Uralo. Sur tiu ĉi teritorio estas parolata ĉ. sepdeko da lingvoj [1].

La plej multaj lingvoj en Eŭropo genealogie apartenas al la familio *hindeŭropa*, enhavanta ĉ. 150 lingvojn kaj du miliardojn da parolantoj (krom Eŭropo ankaŭ en okcidenta Azio kaj en Hindio). Kvankam tiuj ĉi parencaj lingvoj havas kelkajn komunajn trajtojn, ili dum sia plurmiljara evoluo multe malsimiliĝis. En la eŭropa branĉo estas tri grandaj grupoj (la slava, la Romana, la ĝermana) kaj kelke da malgrandaj. La *slavaj* lingvoj havis en la 9-a/10-a jarcento komunan skriblingvon, la eklezian slavan, tial ili eĉ hodiaŭ estas iom reciproke kompreneblaj, se parolataj. Reciprokan skriban komprenon malfaciligas la fakto, ke orientaj Slavoj akceptis ortodoksan kristanismon kaj cirilan alfabeton, dum la okcidentaj kristanoj akceptis roman katolikismon kaj latinan alfabeton. Ĉefaj *Romanaj* lingvoj havas relative malgrandan diatopion, dank' al la komuna latina origino. *Ĝermanaj* lingvoj estas reciproke apenaŭ kompreneblaj, malsimilas eĉ dialektoj ene de la sama ŝtato, ĉar la unuopaj ĝermanaj etnoj estis dum longa tempo politike organizitaj en malgrandaj komunumoj. Evidente estas malfacile trovi iun komunan lingvon eĉ inter tiuj tri grandaj grupoj, neglektante ĉiujn aliajn eŭropajn lingvojn.

Kvankam en Eŭropo troviĝas nur tri procentoj de tutmonde parolataj lingvoj, ili estas relative grandaj: se la mezume granda lingvo, parolata en la mondo, havas ĉ. dekmil parolantojn, estas multegaj eŭropaj lingvoj pli ol mezume grandaj. La nunaj eŭropaj lingvoj (enkrampe la proksimuma nombro de la parolantoj, se konata), estas pli-malpli la jenaj (komp. ekz. Décsy, 1986, p. 7-12):

hindeŭropaj:

Baltaj: la litova (3,5 milionoj), la latva (1,5 miliono)

Slavaj: okcidentaj: la pola (40 milionoj), la soraba (150 mil), la slovaka (5 milionoj), la ĉeĥa (10 milionoj)

[1] pro la konata fakto, ke ne ekzistas precizaj limoj inter lingvo kaj dialekto, malsamas la indikoj ĉe diversaj aŭtoroj, ekz. la plej nova eldono de „Ethnologue" listigas 230 eŭropajn lingvojn

sudaj: la slovena (2 milionoj), la serba (10 milionoj), la kroata
(10 milionoj), la makedona (2 milionoj), la bulgara (9 milionoj)
orientaj: la ukraina (45 milionoj), la rusa (ĉ.100 milionoj en Eŭropo),
la blankrusa (9 milionoj)
Ĝermanaj: nordaj: la islanda (250 mil), la norvega (4 milionoj), la sveda
(8 milionoj), la dana (5 milionoj), la faroa (40 mil)
okcidentaj: la angla (60 milionoj en Eŭropo), la frisa (500 mil),
la nederlanda kaj la flandra (kune 20 milionoj),
la germana (100 milionoj), la leceburga (400 mil)
krome: la jida (200 mil)
Keltaj: la irlanda (maks. 100 mil), la skota-gaela (80 mil), la kimra (500 mil),
la bretona (maks. unu miliono), la manksa (preskaŭ morta)
Romanaj: okcidentaj: la portugala (10 milionoj), la hispana (38 milionoj),
la galega (3 milionoj) , la kataluna (8 milionoj),
la okcitana (maks. 12 milionoj) la franca (60 milionoj),
la itala (60 milionoj), la sarda (1 miliono), la rumanĉa
(50 mil), la retoromana (400 mil), la gudezma/ladina
orientaj: la rumana (20 milionoj), la moldava (2 milionoj)
La novgreka (11 milionoj)
La albana (4,5 milionoj)
La cigana (1,5 milionoj)
El la *irana* grupo: la oseta (500 mil)

Krome estas en Eŭropo parto de la lingvofamilio ***urala***, kun lingvoj
ugrofinnaj: la finna (5 milionoj), la karela (120 mil), la estona (1,6 milionoj),
la vepsa (8 mil), la komia (400 mil), la ingra (20 mil), la vota
(500 mil), la livona (500 mil), la samea (35 mil), la udmurta-votjaka (600 mil), la mordvina (1 miliono), la ĉeremita (600 mil),
la hungara (14 milionoj)
samojedaj: la neneĉa (20 mil), la nganasana

En ekstremorienta Eŭropo estas parto de la lingvofamilio ***altaja,*** lingvoj *turko-tataraj*: la turka (ĉ. 5 milionoj en Eŭropo), la tatara (5 milionoj),
la ĉuvaĉa (2 milionoj), la baŝkira (1,2 milionoj), la kazaĥa
(5 milionoj), la karakalpata (300 mil), la kumika (186 mil),
la nogaja, la karaima (600 mil)
kaj el lingvoj *mongolaj:* la kalmuka (170 mil)
La lingvoj parolataj en Kavkazo estas priskribitaj pli geografie ol genealogie, ĉar ilia parenceco ankoraŭ ne estas kontentige esplorita. En eŭropa parto de Kavkazo troviĝas lingvoj
abĥazaj-adigeaj: la adigea (100 mil), la abazina (25 mil), la kabardina (200 mil)
naĥaj: la ĉeĉena (800 mil), la inguŝa (150 mil)
dagestanaj: la lakŝa (80 mil), la dargina, la lezgina (350 mil), la avara (300 mil)
El la lingva familio ***semida*** troviĝas en Eŭropo la malta lingvo (350 mil).
Tipologie nenien apartenanta lingvo estas **la baska** (680 mil).

Lingvolimoj kaj ŝtatlimoj en Eŭropo preskaŭ nenie koincidas - nur tie, kie al la politikaj kondiĉoj (kiuj multe pli influas la ŝtatorganizon ol etnaj kaj lingvaj kialoj) aliras kondiĉoj geografiaj. Klasika ekzemplo de tia unueco estas Islando, en kies teritorio estas lingve homogena loĝantaro. Tio teorie koncernas ankaŭ alian insulon, Malton, sed krom ties indiĝena lingvo, la malta, ekzistas forta influo de la iama koloniga lingvo, la angla. Ĉiuj aliaj eŭropaj ŝtatoj enhavas historie evoluiĝintajn minoritatajn lingvokomunumojn, kies lingvoj estas aŭ neŝtataj (ekzemple la lapona estas parolata en Norvegio, Finnlando, Svedio kaj Rusio, sed ne ekzistas lapona ŝtato), aŭ ŝtataj lingvoj de najbara lando (ekz. la germana en Belgio). La plej nova teritoria evoluo tendencas al memstarigo de unuopaj nacioj kun ilia lingvo-karakterizilo (ekz. Litovio, Latvio, Estonio, Slovenio, Kroatio, Ĉeĥio, Slovakio). Pri pli da memstareco batalas minoritataj lingvoj (ekz. la kataluna, la baska, la bretona).

Laŭ la klasifikado de Haarman (1992, p. 35-43) ekzistas en Eŭropo:

A. Ŝtatoj kun lingve *homogena* loĝantaro:
Islando, Lichtenŝtejnio, Portugalio

B. Ŝtatoj kun lingve *sufiĉe homogena* loĝantaro (minimume 80% da loĝantoj parolas la saman lingvon):
Albanio, Aŭstrio, Armenio, Azerbajĝano, Bosnio kaj Hercegovino, Britio, Bulgario, Ĉeĥio, Danlando, Gronlando, Finnlando, Francio, Germanio, Grekio, Hungario, Italio, Litovio, Malto, Nederlando, Pollando, Rumanio, Rusio, Svedio, Slovakio, Slovenio

C. Ŝtatoj kun lingve *nehomogena* loĝantaro (malpli ol 80% da loĝantoj parolas la saman lingvon):
Andoro, Belgio, Belrusio, Estonio, Georgio, Hispanio, Irlando, Jugoslavio, Kroatio, Latvio, Makedonio, Moldavio, Monako, Norvegio, Svislando, Ukrainio

2. *Eŭropeco*

La supra statistiko montras, ke ĉiutagaj kontaktoj de diversaj lingvoj estas normalaj, ĉar multaj parolantoj de unuopaj eŭropaj lingvoj vivas ene de siaj ŝtataj teritorioj sufiĉe miksite. Ĉu ili ĉiuj sentas sin eŭropece? Kiel konate, ekde la tempoj de Aleksandro la Granda sentis sin la portantoj de eŭropeco grekoj (helenoj)[2], post ili romianoj kaj iliaj posteuloj, kaj plej laste ĝermanoj. Konsekvence iliaj lingvoj iĝis eŭropece gravaj, disvastiĝadis per koloniigo en aliajn kontinentojn, ĝis ekestis nuna paradoksa situacio, kiam parolantoj de origine eŭropaj lingvoj multe pli abundas ekster Eŭropo ol en ĝi.
Kiel diras „Enciklopedio Simpozio“ (en Filozofia revuo Simpozio 2001/37, p. 7-8), Eŭropo ekde antikvaj tempoj ĉiam pli kaj pli bone organiziĝis, ĝis la „nuntempa erudicia Eŭropo jam sufiĉe evoluis por kompreni siajn kolektivajn interesojn“. Eŭropanismaj proponoj ekzistis ekde humanismo, oni rememoru almenaŭ Hugo Grotius (1583-1645), Wilhelm Leibniz (1646-1716) kaj Immanuel Kant (1824-1804). Krom filozofiaj interesoj pri ideala universala lingvo kiel esprimilo de nocioj kaj portanto de sciencoj, oni tiam apenaŭ sentis bezonon de tuteŭropa lingvo: ĝi ja estis *la latina*, tiatempe jam lingvo sen denaskaj parolantoj, do neŭtrala, lerneje instruata tuteŭrope.

[2] La nomo mem devenas de la greka vorto „europaios“ (sunsubira), ĉerpanta el la semida „ereb“ (malhela)

Ĝi iompostiome perdadis sian gravecon des pli, ju pli la unuopaj etnolingvoj evoluiĝis kaj aŭdacis eniri la kampon de scienca literaturo. Tio validas precipe por la franca, kies gramatiko estis kodigita jam en la 17-a jc. Ĝi havis certan signifon kiel diplomatia lingvo ankoraŭ en pasinta jarcento. *La* internacia lingvo de moderna Eŭropo estas sendube la angla, lingvo origine eŭropa, lerneje tuteŭrope instruata (same kiel iam la latina), sed havanta unu belecmakulon: ĝi ne estas *neŭtrala*, estante denaska lingvo i. a. de popolo eĉ neeŭropa, sed ekonomie potenca.

Kiel komuna *neŭtrala* interlingvo por Eŭropo estas ofertata unuavice la latina, kiu tie ja estas kulture enradikiĝinta, sed kies kutima lerneja instruado ebligas nur pasivajn konojn. Alia proponata neŭtrala solvo estas planlingvo, kiu avantaĝe estas pli regula, sekve pli facile lernebla ol etnolinvoj (inkluzive de la latina), sed al kiu mankas kaj kelkcentjara tradicio, kaj apogo de ŝtataj organoj. Se oni listigas la menciitajn argumentojn, *teorie* estus optimuma solvo la latina, estante kaj tradicie eŭropa, kaj lerneje instruata, kaj neŭtrala, nur ne „facila", dum la angla kaj planlingvo estas en preciza opozicio: la unua estas lerneje instruata kaj origine eŭropa, la dua estas neŭtrala kaj regula:

	latina	angla	planlingvo
lerneje instruata	jes	jes	ne
eŭrope tradicia	jes	jes	ne
neŭtrala	jes	ne	jes
regula, „facila"	ne	ne	jes

Respekto al eŭropa kultura heredaĵo, al kiu apartenas la latina lingvo, naskis proksimume 200 projektojn surbaze de la latina, inter kiuj Latino sine flexione (de G. Peano, el la j. 1903) progresis ĝis praktika uzado kaj funkciis dum ĉ. 30 jaroj kiel lingvo de sciencaj artikoloj, precipe en la revuo „Schola et Vita", kaj kiel oficiala lingvo de „Academia pro Interlingua". En ties cirkulero el la jaro 1926 (Circulare de ApI 1926/2, p. 39), sub titolo *Unione Pan-europaeo,* oni legas: „Interlingvistika movado, kiu tendencas al lingva unuiĝo de la mondo, havas multon komunan kun tuteŭropa movado, kiu deziras politikan unuiĝon de Eŭropo. Iniciinto de la tuteŭropismo estas grafo Dr. Richard N. Condenhove-Kalergi .... kiu .... distribuas inter eŭropaj politikistoj kaj sciencistoj cikuleron enhavantan sekvajn demandojn: 1. Ĉu vi opinias necesa organizon de Unuiĝintaj Eŭropaj Nacioj? 2. Ĉu vi kredas, ke kreo de Unuiĝintaj Eŭropaj Nacioj eblas?" La membroj de Academia pro Interlingua estis petataj, en la citita artikolo, reagi al la du demandoj en Latino sine flexione, por demonstri kaj propagandi ties uzadon.

Koncerne de la plej sukcesaj planlingvoj: Zamenhof parolas pri lingvo *tutmonda*, ekzemple en la „Aldono al la Dua Libro" 1888, kaj pri unuigo de la *homaro* en unu fratan familion (rilate al hilelismo). En la antaŭparolo al la Fundamento ni legas: „Kiam nia lingvo estos oficiale akceptita de la *registaroj de la plej ĉefaj regnoj* kaj tiuj ĉi registaroj per speciala leĝo garantios al Esperanto tute certan vivon kaj uzatecon kaj plenan sendanĝerecon kontraŭ ĉiuj personaj kapricoj aŭ disputoj, tiam aŭtoritata komitato, interkonsente elektita de tiuj registaroj, havos la rajton fari en la fundamento de la lingvo unu fojon por ĉiam ĉiujn deziritajn ŝanĝojn..." (Fundamento, eld. 1963, p.

43). Evidente, akcepto per la registaroj de kelkaj gravaj ŝtatoj devus esti la unua paŝo al tutmondiĝo. Mi ne scias, ĉu Zamenhof mem eksplicite diris, kiuj estas la „plej ĉefaj regnoj", sed mi povas imagi, ke almenaŭ eŭropaj ŝtatoj Germanio, Francio, Britio kaj Rusio apartenus al ili. Hodiaŭ multegas unuflanke proeŭropaj aktivecoj ene de la Esperanto-movado mem, aliflanke enfiltriĝas Esperanto en aliajn poreŭropajn organizaĵojn (ekzemple „UNIROPE, internacia unuiĝo de asociaj organizoj poreŭropaj, aludas la bezonon de neŭtrala kaj sennacia eŭropa komunikilo" kiel legiĝas en ĝia cikulero el junio 2001), oni varbas por ĝi (agorde kun la supre cititaj vortoj de Zamenhof) eĉ en la eŭropa parlamento. Sed tio ankoraŭ ne signifas, ke Esperanto povas proklami sin la plej taŭga internacia eŭropa komunikilo, malgraŭ sia centjara elpruviteco.

Ankaŭ *Interlingua* ofertas sin por Eŭropo, pro sia latineca aspekto, kiel posteulino de la latina lingvo. Malmultaj scias, ke la finaŭtoro de Interlingua, Alexander Gode, unuavice celis per ĝi pruvi la hipotezon de Sapir kaj Whorf, laŭ kiu la okcidenteŭropanoj havas specifan pensmanieron kaj mondkoncepton, influatan de iliaj lingvoj, precipe latinidoj. Laŭ Dalton (Dalton 1992, p. 7) Gode diris: „Super la fundamento de diversaj kulturoj, la homaro de la dudeka jarcento posedas komunan civilizon. Tiu ĉi civilizo korespondas al pensmanieroj originale evoluiĝintaj en la okcidento. Se ni serĉas la lingvon de la moderna civilizo, ni trovos ĝian fundamenton en la okcidento. Sed tio gravas: ni serĉas la lingvon de *nenacia* civilizo kaj ni trovas ĝin en la vivanta *tradicio* asociita kun la potenco, kiu estis Romo." Eĉ se la celo de la aŭtoro estis pli lingvopsikologia ol racie komunika, la rezulto estas kontentiga. Hodiaŭaj apogantoj de Interlingua opinias la uzadon en Eŭropo antaŭŝtupon por la disvastiĝo tutmonda: „ Le maxime scopo es facer interlingua le lingua franca pro uso practic del tote mundo. ... Le prime phase es facer interlingua le lingua franca pro uso practic in le Union Europee e su potential nove mebros e adherentes..." (Panorama in Interlingua 2001/14, n. 3, p. 26).

Kvankam eŭropanoj jam *fakte* havas sian naturan interlingvon, that's no doubt about it, novaj planlingvaj solvoj ne ĉesas aperi kaj ripetiĝas tra historio en malmulte diferenciĝantaj variantoj. Ĉiu nova aŭtoro de internacilingva projekto kredas, ke lia solvo venkos la antaŭajn, inkluzive de la angla, latina, Esperanto kaj Interlingva.

3. *Celoj de planlingvaj projektoj*

Nur malmultaj aŭtoroj konstruas siajn planlingvajn projektojn nur por ĝui la lingvokreadon. La paletro de la celoj estas larĝa, ekzemple
- *celoj praktikaj* : ekde kriptolingvo por kruckavaliroj ĝis facila lingvo por la komerco aŭ por komputila tradukado,
- *celoj filozofiaj* : lingvo kiel nomenklaturo de nocioj kaj ilo de ties klasigo,
- *celoj religiaj* : la tute baza subdivido de planlingvoj ekz. ĉe Bausani (1970) estas en lingvojn religiajn kaj nereligiajn,
- *celoj amuzaj* : infan(ec)a ludismo, literaturaj planlingvoj ekz. de Tolkien, aŭ sciencfikciaj kiel la Klingona, pseŭdorekonstruo de Praesperanto, Eŭropanto ktp.,

- *celoj lingvopsikologiaj* : lingvo influanta la pensmanieron, ekz. Loglan /Lojban por testi logikan pensadon,
- *kolektiva informado kaj kunlaboro*: „Auxilingua Project" en interreto listigas ĉ. tricent membrojn[3], kiuj kreis aŭ kreas helplingvojn, artefaritajn lingvojn, amuzajn aŭ artajn lingvojn ktp. (Auxlangs, Conlangs, Artlangs, Devlangs, Loglangs, Planlangs). La nuntempaj aŭtoroj estas ofte junuloj, kiuj kreas planlingvon inspirite per usonaj televidserioj pri eksterteranoj, eksperimentas kun komputila tradukado ktp., krome enestas ekz. projekto surbaze de la proto-hindeŭropa lingvo (Newospeeg de Dirk Elzinga el Arizono), aŭ lingvo por ekvilibrigi teknikon kaj estetikon (Vorlin de Richard Harrison), aprioraj filozofiaj lingvoj (ekz. „aUI" de W. John Weilgart), futurisma lingvo lanĉita de kolektivo (Next Generation Language) kaj multaj aliaj, ofte kun ekzotikaj nomoj: Antalet, Bogomol, Dgeaspregos, Liva, Machi, Naqu Oqtanu, Rikchik, Sitarwelas ... Superrigardon de ĉ. 270 artefaritaj lingvoj (Conlangs) ofertas Richard Kennaway sub www.sys.uea.ac.uk/~jrk/conlang.html.

La plej kutima celo de planlinvo-aŭtoroj tamen estas plifaciligi la internacian interkomprenigon. Kvankam ne malmultaj aŭtoroj intencas krei la unuran lingvon por la tuta homaro (jam la humanismaj filozofoj kredis, ke tia lingvo iam mem elfluos el la esenco de aĵoj kaj tiam la homoj forlasos siajn neperfektajn etnolingvojn), la plej multaj tamen ĝentile permesas al la homaro konservi la proprajn etnolingvojn por internaj kontaktoj kaj uzadi la planlingvon nur kiel aldonan helplingvon por interkompreniĝi kun malsamlandanoj/malsametnanoj. Do, la racia kaj akceptebla celo estas *la dua lingvo por ĉiuj*. Nun – kiu estas ĉiuj? La kuraĝo de la aŭtoroj ĉikampe havas ankaŭ larĝan spektron: ekzistas planlingvoj celitaj por la tuta mondo, aŭ nur por parto de la mondo, kiu estu ekz. tuta Eŭropo, aŭ nur parto de Eŭropo, aŭ nur certa etnogrupo kiel Slavoj (ekz. Slavina, Medĵislav, Slovanŝtina) ĝermanoj (Allgemeine Sprache,Tutonisch, Euronord, ktp.).

4. *Iom da historio*

Fidindan bibliografion de planlingvaj projektoj ĝis 1973 kunmetis Duliĉenko (1990). Tie troviĝas i. a. dudeko da projektoj, kies nomoj indikas celon iĝi interlingvo por Eŭropo:

- *La vest-europish central dialekt*, de A. Nilson, Svedio, el la j. 1896, surbaze de ĝermanaj kaj Romanaj lingvoj
- *Europaeische Sprache*, de F. Engelmann, Rumanio, el la 20-a jc, sur la samaj principoj kiel Esperanto
- *Lingua european*, de B. van Bijlevelt, Belgio, el la j. 1907, reformo de projekto Idiom Neutral. La aŭtoro redaktis en sia lingvo revuon.
- *Europaeische Sprache,* de W. Borgius, Germanio, el la j. 1911-14, vortaro surbaze de la plej oftaj leksemoj en la plejmulto de eŭropaj lingvoj
- *Europal*, de J. Weisbart, Germanio, el la j. 1912

[3] Auxiligua krome informas pri pioniroj de interlingvistiko, kiel Gode, Jespersen, Liptay, Peano ktp., kaj pri antaŭaj projektoj, inkluzive de Vopalük, Esperanto, Ido, Idiom Neutral, Interlingua, Occidental k. a.

- *Uropa,* de W. Donisthorpe, Anglio, el la j. 1913, „simpla lingvo filozofie konstruita surbaze de latinaj radikoj"
- *Etem,* de N. V. Juŝmanov, Sovetio, el la j. 1917, latinida „lingu inter-european", en kiu la aŭtoro, lingvisto, skribis kelkajn sciencajn artikolojn. Li mem evoluigis sian lingvon, la lastaj ŝanĝoj estas el la j. 1926.
- *Europan,* de J. Weisbart, Germanio, el la j. 1925, verŝajne modifo de antaŭaj projektoj de la sama aŭtoro.
- *Oiropa Pitshn,* de A. Baumann, Germanio, el la j. 1928, surbaze de germana lingvo, prilaboro de antaŭaj projektoj Wede, Weltdeutch, Weltpitshn: la aŭtoro modestigis la uzad-arealon de sia projekto.
- *European,* de H. Bijlsma, Nederlando, el la j. 1930, latinida, eble prilaboro de lia antaŭa projekto Latin simplifié, simila al Occidental
- *Europan,* de poeto V. Larbaud, Francio, el la j. 1934, estas literatura ludo, tre simila al la hodiaŭa Europanto, miksaĵo de precipe Romanaj kaj ĝermanaj, iomparte slavaj lingvoj. Jen peco de poemo „La neige" (Citita de Drezen, 1990, p. 257, el Cosmoglotta, 1968, 252, p. 51):

  Un año más und iam eccoti mit uns again
  Pauvre et petit on the graves dos nossos amados édredon
  E pure piously tapàudolos in their sleep
  Dal pallio glorios das virgens und infants
  With the mind's eye ti sequo sobre l'europa estasa
  On the vas Nothern pianure dormida, ņitida nix
  Oder on lone Karpathian slopes donde, zapada,
  Nogorum brazilor albo disposa velo bist du...
- *Langue paneuropéenne,* de J. Kainulainen, Francio, el la j. 1949
- *Eurean,* de R. Jégo, Francio, el la j. 1954-55, pli naturalisma ol Interlingua
- *Euroglot,* de E. Ahlstroem, Svedio, el la j. 1957, sintezo de projektoj Interlingue, Interlingua kaj Mondial, bazita sur okcidenteŭropaj lingvoj, latinideca.
- *Lingua de Europa,* de J. Ch. Homo, Svislando, el la j. 1959, miksaĵo de Interlingua kaj Occidental „neolatin-angloid". La aŭtoro eldonis revuon „Amicitie European" en sia lingvo.
- *Lingua Europaea,* de W. Schaetzel, Svislando, el la j. 1959, propono pri internacia vortaro, precipe sciencteknika, la gramatiko ne konatas.
- *Eurolingva,* de H. K. J. Cowan, Nederlando, el la j. 1962, baziĝanta sur Latino sine flexione
- *Evropi Spik,* De F. Legat, Austrio, el la j. 1966, plej verŝajne surbaze de ĝermanaj lingvoj
- *Europé,* de A. Cejnar, Brazilo, el la jaro 1970
- *Eurolengo,* de L. Jones, Anglio, el la jaro 1972, surbaze de la lingvoj angla kaj hispana, „por komerco kaj turismo".

Kvankam ĉiuj ĉi lingvoprojektoj estis intencitaj iĝi internaciaj tuteŭrope, ilia bazo estis romanaj kaj ĝermanaj lingvoj, kun escepte iomete da slava spicaĵo; aliaj eŭropaj lingvoj estis tute neglektataj. Tiu ĉi koncepto daŭras ĝis nun: kiel „Eŭropo" estas komprenataj nur okcidenteŭropaj landoj, aŭ, pli bone, la Eŭropa Unio. La reston oni

simple neglektas, kvankam minimume ankaŭ la slavaj landoj almenaŭ geografie apartenas tien.

5. *Hodiaŭaj proponoj*

Ekzistas homoj, kiuj tutan sian vivon dediĉis al kreado kaj plibonigado de internacia lingvo, ekzemple germano Erich Weferling (1889-1981), kiu dum trideko da jaroj daŭre plibonigadis sian latinidan projekton Intal, parencan kun Occidental, Interlingua kaj Ido. Alia ekzemplo estas 82-jara franco Maurice Martin, kiu per sia lingvo *Europo* „deziras batali kontraŭ miskompreno kaj malamo inter Eŭropanoj". Li ellaboris lernolibrojn en la lingvoj franca kaj germana, kun gramatiko kaj legaĵo. Lia solvo estas ĝermaneca, ĉar li eliras el la fakto, ke la angla estas la lingvo plej parolata kaj la germana la lingvo plej granda en Eŭropo. Ĝi eliras el jenaj principoj: (Martin 2001, p. 2): 1) la internacia lingvo rajtas esti de „sinteza" tipo, estante preciza kaj enhavante nociojn komunajn al ĉiuj homoj, ekz. ankaŭ tiujn de nombro kaj ĝenro, 2) ĝia fonetiko havu ekvilibrajn belsonajn kombinojn de vokaloj kaj konsonantoj, 3) ĝi estu logika, kun fonetika ortografio kaj senescepta gramatiko, 4) ĝi havu nur unu tipon da konjugacio, unu verban formon po tempo, subjekton indikantan personon, 5) la deklinacio estu prepozicia, 6) krome ekzistu „simbolaj" literoj kun precize difinita senco, 7) ĝia vortaro enhavu radikojn la plej vaste konatajn (latinajn, grekajn, anglajn) kaj respegulu la grandan rolon de la angla kaj germana lingvoj 8) ĝi evitu homonimojn kaj sinonimojn. Kun *Europo* havu ĉiuj bonan kuraĝon kaj ĝojon: „Alam gyd mydo og frode!"

La plej novaj planlingvaj projektoj aperas amase en interreto. Seriozeco de interretaj paĝoj estas tikla demando; neniu science recenzas ilin, oni povas laŭplaĉe ŝanĝi, evoluigi kaj prilabori ilin. Ĉu citi interretan paĝon kiel literaturan fonton? Ĝi ja povas sekvontmomente havi tute alian aspekton, ne plu enhavi la cititan informon ktp. Jen kelkaj ekzemploj, trovitaj aŭguste 2001:

Sub www.novaroma.org troviĝas organizaĵo, kiu celas restarigi antikvan roman imperion. Ĝia centro estas en Usono, dividita en dek provincojn kun koncernaj legioj, ekz. Legio I estas en Nevada, Legio II Augusta en Portland, Legio III Gallica en New Orleans. Eŭropo dividiĝas en naŭ provincojn, al kiuj cetere apartenas ankaŭ landoj, kien Romanoj neniam metis piedon, kiel Sarmatia (Rusio) kaj Thule (norda Eŭropo). La Nova Romo havas kelkcent civitanojn: usonanoj estas patricioj[4], videblaj surekrane en pompaj togoj; ekz. Ĉeĥoj kaj Slovakoj (loĝantaj en la provinco Pannonia) estas plebejoj, sed almenaŭ havas belajn latinajn nomojn (ekz. Alexander Iulius Caesar Probus Macedonicus). Senaton prezidas du (usonaj) konsuloj: consul Flavius Vellius Germanicus de Mediatlantica kaj consul Marcus Cassius Iulianus de Nova Britannia. Ĉio ĉi estas „a quite serious attempt to make the Classical World a living system once again". Ĉu en Nova Romo oni almenaŭ uzas la latinan lingvon? „While a knowledge of Latin migt be helpful in understanding some therms, it is in *no way required*". Tiu ĉi organizaĵo draste, sed realisme montras la nudan veron, kiun oni ofte ne volas vidi: la nova roma imperio centras en Usono kaj ĝia lingvo estas la angla.

[4] nur la unuaj tridek gentoj en la Nova Romo rajtas esti patricioj

Eĉ se do ekzistas *la* lingvo por la mondo inkluzive de ties eŭropaj provincoj, la nombro de planlingvaj projektoj daŭre kreskas.

Al Eŭropo tamen pensas ekz. Klaus Dieckmann alias Henricus de Stalo el Köln, ofertanta en interreto sian projekton *Eurisch* (http://henricus.purespace.de). Lia projekto „estas nacia lingvo de Eŭropo, kiu helpas reciprokan komunikadon de Eŭropanoj. La lingvo estas revivigo de la parolata latina, kreskinta en la roma imperio. Ĝia celo estas restarigi la *roman imperion en klasika formo*, kiun ĝi havis, antaŭ ol ĝermanaj triboj ĝin detruis, kaj disvastigi ĝin norden kaj orienten en Eŭropo". La celo do estas preskaŭ identa kun la antaŭe menciita. La lingvo mem estas en stato de konstanta evoluo, ĉar la aŭtoro estas „hobby linguist", sed - de laborista origino, kio krome ebligas al li iom (tro) da komunisma propagando.[5]

www.alexander.iofm.net (el la universitato en Kentucky) vidas neceson de la *universala dua lingvo*, iomete pli perfekta ol la angla (kiu tamen kaŭzas kelkajn problemetojn dum tradukado), kaj prezentis en 1996 „a fully democratic approach towards an international auxiliary language initially based on *reformed English*", kies versio „LANG53" estas momente ellaborata. Ĝia principo estas simpligo de gramatiko, kun reguligo de ortografio kaj prononco de la angla. Tiu ĉi lingvo estos helplingvo dum estontaj jarcentoj, ĉar ĉio alia malsukcesis: „LANG53 wil be an auxiliary language for a very long time, i. e. generations or centuries .... Esperanto's hope remaining unrealised, at least under its current constitution."

Preskaŭ identajn celojn („to provide an auxiliary language for world use") havas *Gilo*, kiu ricevis nomon laŭ sia aŭtoro Alan Giles (http://users.classicfm.net/alangiles). Ankaŭ ĝi baziĝas sur *la angla*, t. e. la ununura ekzistanta mondolingvo: „The only international language used today is English and therefore it makes sense to use English than anything else". Nur, „por esti alirebla ankaŭ al ĉinoj, rusoj, hindoj, araboj ktp.", la angla devas esti iom pli „condensed": la radikoj estu unusilabaj, la gramatiko logika, la ortografio regula, sekve la uzo kaj lernado estos ege simpla: „oz di me jo u xopi" = yesterday I go to shops, „ uz di me jiz u xo frena" = tomorrow I go to friend's house, „Meri bez mu bela kom Ann" = Mary is more beautiful that Ann.

La ideo tamen preferi *la latinan*, almenaŭ por eŭropaj sciencistoj, trovas ankaŭ en interreto grandan apogon. Apud la defendantoj de la klasika latina lingvo, kiu havas siajn batalantojn eĉ en Usono, reaŭdiĝas, kun aktualaj komentoj, la voĉoj de pasinteco: reaperas eldonoj de ekz. Latino sine flexione el 1931 aŭ de latinida Master Language el 1907, moderniĝas la latin-greka projekto „Glosa", kiun lanĉis Lancelot Hogben jam 1947, prilaboris ĝin Wendy Ashby kun Ronald Clark en 1972 kaj nun interrete ofertas „18 steps to fluency in Euroglosa".

David Stark, sub www.geocities.com/athens/3150/latinomoderne.html konstatas, ke, „se la latina lingvo estus travivinta, ĝi estintus kaj perfekta pontolingvo por unuiĝinta Eŭropo, kaj tutamerika interlingvo", kaj malkovras, ke „la latina travivas kiel bazo de kelkaj modernaj eŭropaj lingvoj, ĉefe la hispana, la itala, la franca kaj la portugala". Ĝi tamen bezonas modernigon, tial la menciita sinjoro inventis *Latino Moderne,* helpe de

[5] Jen recepto, kiel serioza lingvisto povas perdi reputacion: postkiam mi rete petis la aŭtoron pri pluaj informoj, mi aperas en lia listo kiel „apoganto" de lia projekto!

la baza vortaro de Interlingua de IALA. Rezultas novlatinida projekto simila al Interlingua, sed kun iom alia gramatiko. La aŭtoro larĝanime (ni dirus zamenhofece) ofertas Latino Moderne al ĉiu, kiu ĝin deziras uzi, sub la kondiĉo, ke ties fundamento ne estos ŝanĝata, antaŭ ol fondiĝos Akademio de Latino Moderne, kiu malebligos konfuzaĵon: „Latino Moderne es le possession de alicuno qui volerea usar lo. Io sole requesto del usandos sues que le Summario de Latino Moderne ne sera alterar ante que una Academia del Latino Moderne es formate in le futuro."

La ideo de la *lingva akademio* (kiu, cetere, datas de 1887, kiam fondiĝis Kadem Volapüka) aperas ankaŭ sub www.geocities.com/athens/4004/academy.html , koncerne de „Lingu Komune" aŭ *Link* : „Link Akademie" estas internacia asocio kun tri taskoj: 1) studi disvolivoĝon de Link kaj ties parolkomunumo, 2) gardi la lingvon kaj proponi solvojn de lingvaj problemoj – la akademio estas la plej alta juĝisto de la lingvokorekteco, 3) esti gvida organo de Link-Asocio. La lingvo mem estas „a language constructed for human communication on an international level, as easy to learn and use as possible for as many people as possible", do la eble plej facila internacia lingvo, kiu tamen estas celita por la tuta mondo „por eviti eŭrocentrismon de la antaŭaj helplingvoj", kaj kies devizoj estas internaciismo, multikulturismo kaj homogeneco. Tial ĝi ĉerpas ankaŭ el neeŭropaj lingvoj, precipe el la araba (ekz. „le leji kitab dura a omni tem" = li legas malfacilajn librojn ĉiutempe).

Komuna dua lingvo por la Eŭropa Unio celas esti *Eurolang* de Philip Hunt (www.vision25.demon.co.uk), „the language you can learn in a weekend", bazita ĉefe sur la lingvoj angla, franca, itala kaj hispana, „as easy as possible" por ĉiuj, kiuj havas bazajn konojn de tiuj ĉi lingvoj: "Europa person, qui deja sav uno or plus uno de da langs, probable pos lectar Eurolang, si ge hav studieda it per 2 days." La lingvo estas „under construction" kaj momente furoras ĝia kvara versio, sed la aŭtoro almenaŭ havas klaran strategian planon: 1) enkonduki tiun ĉi komunan lingvon en ĉiujn lernejojn kiel la unuan fremdlingvon, 2) subvencii ĝian instruadon ĉe plenkreskuloj, 3) produkti tekstojn, librojn, filmojn, televidan kaj radian prezentadon, retpaĝojn, vortarojn ktp., 4) permesi al la civitanoj komuniki kun registaroj kaj ŝtataj administrejoj en tiu ĉi lingvo, 5) publikigi en ĝi oficialajn ŝtatajn dokumentojn. Samkiel Eŭropo estas matura por la komuna mono, ĝi baldaŭ estos matura por la komuna lingvo: „okay, die est methodae que it posaria estar faceda".

David Crandall (http://members.aol.com/dkcsac/myhomepage) proponas komunan lingvon almenaŭ al la parolantoj de Romanaj lingvoj: lia *Romanova* ĉerpas el la lingvoj hispana, franca, itala kaj portugala. Krom gramatiko kaj baza provizo de trimil vortoj ofertiĝas sur lia hejmapĝo vortaroj Romanova-English kaj English-Romanova, kaj „Automatic Translation from Romanova to English". Resume, se krom la angloparolantoj kuraĝas ankoraŭ ekzisti parolantoj de Romanaj lingvoj, ili almenaŭ havu unu komunan, aŭtomate tradukeblan en la anglan: „We have created this language in the hope that all the speakers of the modern Romance languages will be able to communicate efficiently ."

Lingua Franca Nova de Dr. C. George Boeree (www.ship.edu/~cgboeree) estas alia „tre simpla, kohera kaj facile lernebla lingvo por internacia komunikado." kun „multaj pozitivaj kvalitoj": 1) 5 vokaloj kaj 19 konsonantoj, sonantaj kiel en la itala aŭ la

hispana, 2) fonetika skribmaniero: „neniu infano perdos jarojn pro lerni malregulaĵojn", 3) komplete regula gramatiko kun nur ses sufiksoj, 4) regula sistemo de 23 vortproduktaj afiksoj, 5) fiksa vortordo, 6) vortdeveno el Romanaj lingvoj, 7) latinaj kaj grekaj fakvortoj, 8) „El es desiniada aperir plu parte natural per los ci comprende la linguas roman, ma eser no plu infasil aprender per otras".

Ĉiuj proponoj de novaj internaciaj lingvoj en interreto estas prezentataj kaj komentataj en la angla, kelkfoje aldone en la proponata lingvo mem. Eblas konkludi, ke, malgraŭ diversspecaj proponoj, la estonteco de (ne nur) eŭropaj lingvoj estas en la angla kaj en interreto. If you are in doubts, consult your computer!

Literaturo

Bausani, Alessandro (1970): *Geheim- und Universalsprachen*, Stuttgart: Kohlhammer

Circulare *de Academia pro Interlingua* 1926/2

Dalton, Ric (1992): *The Anatomy of a Failure*, Leeds: Publishers Eldonejo

Décsy, Gyula (1986): *Statistical Report on the Languages of the World*, Bloomington: Eurolingua

Duliĉenko, Alexander (1990): *Mejdunarodnye vspomogatelnye jazyki*, Tallinn: Valgus

„Eŭropanismo" en Filozofia revuo Simpozio 2001/37, p. 7-8

Haarman, Harald (1993): *Die Sprachenwelt Europas*, Frankfurt/New York: Campus

Martin, Maurice (2001): *Spokrige og énam vordrice los Europo*, manuskripto

Zamenhof, L. L. (9-a eld. 1963): *Fundamento de Esperanto*, Marmande: Esperantaj francaj eldonoj

http://henricus.purespace.de

http://members.aol.com/dkcsac/myhomepage

http://users.classicfm.net/alangiles

www.alexander.iofm.net

www.geocities.com/athens

www.novaroma.org

www.ship.edu/~cgboree

www.sys.uea.ac.uk/~jrk/conlang.html

www.vision25.demon.co.uk

Ricevita 2001-08-20

Adreso de la aŭtoro: Dr. Věra Barandovská-Frank, Kleinenberger Weg 16, D-33100 Paderborn,
bbara1@hrz.uni-paderborn.de

Europäische Sprachen und Zwischensprachen (Knapptext)

In Europa existieren ca. 230 Sprachen und Dialekte, die zwar meistens typologisch ähnlich, aber untereinander unverständlich sind. Nicht mal innerhalb der grössten verwandten Gruppen (romanisch, germanisch, slawisch) kann man sich ohne Probleme verständigen. Latein, die ehemalige internationale Sprache Europas, wird heutzutage durch Englisch ersetzt. Da diese Lösung undemokratisch ist, bemühen sich viele Autoren der Plansprachen, eine gemeinsame neutrale Zweitsprache für Europa zu entwickeln. Solche Projekte erscheinen jetzt zunehmend im Internetz, oft mit politischen, bzw. sprachpolitischen Ideen verbunden. Abgesehen vom relativen Erfolg von Esperanto und Interlingua wird keine dieser Lösungen realisiert: alle Kommentare werden dabei auf Englisch geschrieben, was beweist, dass Europa diese sprachimperialistische Lösung trotzdem akzeptiert.

grkg / Humankybernetik
Band 42 · Heft 4 (2001)
Akademia Libroservo / IfK

Gerolamo Cardano e l'insegnamento dell'aritmetica
(nel 500° anniversario della nascita)

Gerolamo Cardano kaj la instruado de aritmetiko
(en la 500-a datreveno de lia naskiĝo)

Carlo MINNAJA, Padova (I)

Università di Padova, Akademio Internacia de la Sciencoj San Marino

1. *Cardano nelle sue opere e nel suo tempo*

Gerolamo Cardano (Pavia 1501- Roma 1576) fu una personalità singolare della scienza rinascimentale: abbastanza antico per essere ancora profondo conoscitore di varie arti e scienze, abbastanza moderno per essere conoscitore specializzato di alcune di queste; abbastanza antico per dichiararsi superstizioso, credente nella religione, fiducioso nella divina provvidenza e abbastanza moderno per non attribuire soltanto a quest'ultima i casi tristi e lieti della sua vita movimentata. Di lui ci restano oltre 120 opere in latino, e numerosissime traduzioni in varie lingue volgari di alcune di queste (assai poche per la verità); la sua scelta di scrivere in latino ne fa un uomo conosciuto internazionalmente per una fama generica derivante dalle sue opere maggiori, e invece poco conosciuto nei singoli paesi europei per quanto riguarda le sue opere specialistiche, raramente tradotte nelle lingue nazionali ormai affrancatesi dalla tutela del latino, ma interessanti non meno di quelle più note. Tuttavia ci sono più copie delle opere di Cardano nel resto d'Europa, specie in Francia, che non in Italia.

Alcune grandi opere furono pubblicate quando Cardano era in vita; ma ad esempio l'Autobiografia (*De vita propria*), opera di indubbio valore letterario, pur con qualche pecca, e principale fonte di tutte le notizie su Cardano, fu scritta pochi anni prima della morte, ma fu pubblicata solo nel 1643 a Parigi dallo studioso francese Gabriel Naudé, quindi a quasi settant'anni dalla morte

1. *Cardano en siaj verkoj kaj en sia tempo*

Gerolamo Cardano (n. Pavia 1501– m. Romo 1576) estis rimarkinda personeco de la renesanca scienco: sufiĉe antikva por esti ankoraŭ profunda konanto de diversaj artoj kaj sciencoj, sufiĉe moderna por esti faka konanto de kelkaj el ili; sufiĉe antikva por sin deklari superstiĉa, kredanto en la religio, fidema en la dia providenco, kaj sufiĉe moderna por ne atribui nur al ĉi-lasta la malgajajn kaj gajajn okazojn de sia eventoriĉa vivo. De li restas al ni pli ol 120 verkoj en la latina, kaj tre multnombraj tradukoj en diversaj vulgaraj lingvoj de kelkaj el ili (tre malmultaj, verdire); lia elekto verki en la latina igas lin internacie konata pro iel supraĵa famo venanta al liaj plej gravaj verkoj, sed male malmulte konata en la unuopaj eŭropaj landoj koncerne liajn fakajn verkojn, malofte tradukitajn en la naciajn lingvojn liberiĝintajn el la subiĝo al la latina, sed interesajn ne malpli ol la pli famajn. Tamen estas pli da ekzempleroj de la verkoj de Cardano en la resto de Eŭropo, precipe en Francio, ol en Italio.

Kelkaj grandaj verkoj estis publikigitaj kiam Cardano ankoraŭ vivis; sed ekzemple la aŭtobiografio (*De vita propria*), verko de sendube granda beletra valoro, kvankam kun iuj difektoj, kaj ĉefa fonto de ĉiuj elementoj pri Cardano, estis verkita kelkajn jarojn antaŭ lia morto, sed estis eldonita nur en 1643 en Parizo de la franca fakulo Gabriel Naudé, do preskaŭ sepdek jarojn post la morto de la

dell'autore. Essa è un interessantissimo spaccato della vita del Cinquecento italiano, delle dispute tra accademici, del degrado della vita politica italiana sottomessa alle guerre tra Francia e Spagna, dei timori e delle superstizioni dell'autore. La prima edizione completa (in originale latino) delle opere di Cardano viene edita a Lione, dal medico Charles Spon, nel 1663, cioè 87 anni dopo la sua morte (dieci volumi in folio). Tuttavia le sue opere erano famose in Europa anche durante la sua vita, attraverso pubblicazioni limitate, come si trattasse di dispense per alunni, e già esistevano saggi, commenti e numerose traduzioni in lingue volgari prima che apparisse l'opera completa in latino.

Il frontespizio delle opere di Cardano in tale edizione lionese, uguale per tutti i volumi, reca un'illustrazione in cui compaiono Tolomeo con in mano un compasso ed una sfera, ed Euclide con in mano un compasso e una tavola per scrivere. Tolomeo ha in capo una corona: questa raffigurazione proviene dalla consuetudine errata di identificare lo scienziato Claudio Tolomeo, vissuto nel II sec. d.C. ad Alessandria d'Egitto, con uno dei quindici re d'Egitto di ugual nome, discendenti da Tolomeo I, satrapo succeduto ad Alessandro Magno e rimasto sovrano dell'Egitto alla morte di questi. La dinastia dei Tolomei si estinse con la conquista dell'Egitto da parte dei Romani: l'ultimo erede, Tolomeo XV, figlio di Cleopatra e di Giulio Cesare e più noto sotto il nome di Cesarione, associato dalla madre al regno quando aveva ancora tre anni, fu poi fatto uccidere da Ottaviano dopo la battaglia di Azio. Questa battaglia concluse la lotta tra Ottaviano da una parte e Antonio e Cleopatra dall'altra, ed acquisì definitivamente a Roma la provincia d'Egitto. La supposizione che lo scienziato fosse un re maturò nel Medioevo e durò, generalizzata, per tutto il Rinascimento: anche Raffaello, nel dipinto *La scuola d'Atene*, che si trova nelle Stanze Vaticane, rappresenta Tolomeo con la testa coronata.

In mezzo ai due personaggi è raffigurata la sfera armillare (con la Terra al centro), stru-

aŭtoro. Ĝi estas tre interesa sekco pri la vivo de la itala Deksesjarcento, pri la disputoj inter akademianoj, pri la defalo de la itala politika vivo, submetita al la militoj inter Francio kaj Hispanio, pri la timoj kaj la supersitĉoj de la aŭtoro. La unua kompleta eldono (en la latina originalo) de la verkoj de Cardano aperas en Liono, zorge de kuracisto Charles Spon, en 1663, do 87 jarojn post lia morto (dek grandformataj volumoj). Tamen liaj verkoj estis famaj en Eŭropo ankaŭ dum lia vivo, tra limigitaj eldonoj, kvazaŭ temus pri studkajeroj por lernantoj, kaj jam ekzistis eseoj, komentarioj kaj plurnombraj tradukoj en vulgaraj lingvoj antaŭ ol aperis la kompleta verkaro en la latina.

La frontispico de la verkaro de Cardano en la liona eldono, egala por ĉiuj volumoj, havas ilustraĵon kie aperas Ptolemeo kun enmane cirkelo kaj sfero, kaj Eŭklido, kun enmane cirkelo kaj skribtabulo. Ptolemeo havas surkape kronon: ĉi figuro devenas de la erara kutimo identigi la sciencistón Klaŭdion Ptolemeon, vivintan en la 2-a jarc. p.K. en Aleksandrio, kun unu el la dek kvin reĝoj de Egiptujo kun sama nomo, idoj de Ptolemeo I, satrapo starigita de Aleksandro la Granda de Makedonio kaj restinta kiel reĝo de Egiptujo je lia morto. La dinastio de la Ptolemeoj estingiĝis kun la konkero de la Egiptujo fare de la Romianoj: la lasta heredanto, Ptolemeo XV, filo de Kleopatra kaj de Julio Cezaro kaj pli konata sub la nomo Cezariono, kunigita de la patrino al la reĝeco kiam li estis ankoraŭ trijara, estis poste murdigita de Oktaviano post la batalo de Actium. Tiu-ĉi batalo finis la lukton inter Oktaviano unuflanke kaj Antonio kaj Kleopatra aliflanke, kaj akirigis definitive al Romo la provincon de Egiptujo. La supozo, ke la sciencisto estis reĝo ekestis en la Mezepoko kaj pludaŭris, ĝeneraligita, dum la tuta Renesanco: ankaŭ Rafaelo, en sia pentraĵo *La skolo de Ateno*, troviĝanta en la Vatikanaj ĉambroj, bildigas Ptolemeon kun kronita kapo.

Meze de la du personoj estas la "sphera armillaris" (kun la Tero en la centro), astro-

mento astronomico fatto di anelli metallici rappresentanti i principali cerchi della sfera celeste, tramite il quale si potevano rappresentare i moti apparenti degli astri più importanti. La sfera armillare è contornata da un cartiglio con la scritta *UNIVERSITAS RERUM UT PULVIS IN MANU IEHOVAE* (L'intero mondo è come polvere nelle mani di Dio). Singolare è qui il termine "Iehovae", attualmente italianizzato in "Geova". Si tratta di un termine nato nel Cinquecento, proveniente da un'errata vocalizzazione del tetragramma consonantico *YHWH*, simbolo usato nella Bibbia ebraica per indicare Dio. Poiché il nome di Dio non era mai pronunciato dagli Ebrei per rispetto, non è mai pervenuta a noi la pronuncia di quelle quattro consonanti, e quindi è ipotetica la lettura delle vocali da inserire. La lettura "Yehowa" proviene dal fatto che gli ebrei leggono il tetragramma usando una parola del tutto differente, e cioè "Adonai" ("mio Signore", anzi, più precisamente, "miei Signori" al plurale), e quindi si è supposto di poter inserire nel tetragramma consonantico le vocali di quest'altra parola, con la "a" mutatasi in "e" per motivi ignoti. Pertanto la lettura latinizzata in "Iehova" proviene dalle consonanti di una parola inframezzate dalle vocali di un'altra. Su quale fosse la lettura originaria non vi è certezza, probabilmente "jahwé", come è la trascrizione che il vescovo Teodoreto (V sec.) attribuisce ai Samaritani, anche se Clemente Alessandrino (II sec.) trascrive in greco 'Ιαού e, dopo di lui, Origene (III sec.) trascrive in 'Ιαώ. Quale fosse il significato del tetragramma è del pari ignoto: una suggestiva ipotesi è che sia l'acronimo della locuzione *Yihye Howe WeHaya* (egli sarà, è, era).

Il decimo volume dell'*Opera omnia* di Cardano (*Hieronymi Cardani mediolanensis philosophi ac medici celeberrimi operum tomus decimus*) contiene una succosa miscellanea: *Opuscula miscellanea ex fragmentis et paralipomenis*, dove il termine *paralipomeni* (lett: cose tralasciate) indica piccole opere di aggiunte, commenti e varie. (Nella terminologia biblica col titolo di *Paralipomeni* vanno, nella versione greca dei Settanta, due libri di cronache che integrano fatti e vicende dei libri di *Samuele* e dei *Re*.)

nomia instrumento farita el metalaj ringoj reprezentantaj la ĉefajn cirklojn de la ĉiela sfero, pere de kiu oni povis bildigi la ŝajnajn movojn de la plej gravaj astroj. Tiu sfero estas ĉirkaŭata de paperstrio kun la skribo *UNIVERSITAS RERUM UT PULVIS IN MANU IEHOVAE* (La tuta mondo estas kiel polvo en la manoj de Dio). Rimarkinda estas ĉi-tie la termino "Iehovae", nun italigita en "Geova". Temas pri termino ekinta en la Deksesa Jarcento, venanta el erara vokaligo de la kvarkonsonanta signo *YHWH*, simbolo uzata en la hebrea Biblio por indiki Dion. Ĉar la nomo de Dio neniam estis elparolata de la Hebreoj pro respekto, neniam venis al ni la prononco de tiuj kvar konsonantoj, kaj do estas hipoteza la lego de la enmetendaj vokaloj. La lego "Yehowa" venas de la fakto, ke la Hebreoj legas la kvarkonsonantan simbolon uzante tute malsaman vorton, t. e. "Adonai" ("mia Sinjoro", eĉ, pli precize, "miaj Sinjoroj" plurale), kaj do oni supozis ke oni rajtas enŝovi inter la konsonantojn la vokalojn de ĉi alia vorto, kun la "a" aliiĝinta al "e" pro nekonataj kaŭzoj. Tial la latinigita lego "Iehova" venas el la konsonantoj de unu vorto kun alterne enmetitaj vokaloj de alia. Pri kiu estis la origina lego ne estas certe, probable "jahwé", kiel estas la transskribo kiun episkopo Teodoreto (5-a jarc.) atribuas al la Samarianoj, kvankam Klemento el Aleksandrio (2-a jarc.) transskribas en la grekan 'Ιαού kaj post li, Origeno (3-a jarc.) transskribas en 'Ιαώ. Kia estis la signifo de la kvarkonsonanta simbolo estas same nekonate: sugestia hipotezo estas, ke ĝi estas la akronimo de la lokucio *Yihye Howe WeHaya* (li estos, estas, estis).

La deka volumo de la *Opera omnia* de Cardano (*Hieronymi Cardani mediolanensis philosophi ac medici celeberrimi operum tomus decimus*) enhavas sukoplenan miscelaneon: *Opuscula miscellanea ex fragmentis et paralipomenis*, kie la termino *paralipomeni* (laŭvorte: preterlasitaĵoj) indikas malgravajn verkojn el aldonoj, komentarioj kaj diversaĵoj. (En la biblia terminologio sub titolo *Paralipomenoj* estas, en la greka versio de la Septuaginto, du libroj de kronikoj, kompletigantaj faktojn kaj eventojn de la libroj de *Salomono* kaj de la *Reĝoj*.)

2. *Cardano e l'aritmetica*

In una di queste piccole opere Cardano insegna l'aritmetica, a livello di principianti. Egli non insegnò mai ufficialmente matematica all'università, dove invece fu professore di medicina, e tutte le sue diatribe e contrasti con i colleghi riguardavano aspetti prettamente pratici di questa scienza. Tuttavia Cardano pubblicò anche vari studi teorici, dei quali uno sui veleni e sui rispettivi contravveleni (*De venenis*, 1564), che rimase poi a lungo come un testo autorevolissimo in materia. La laurea in medicina gli fu conferita a Padova, passata di recente sotto il dominio della Serenissima, nella Cattedrale, domenica 13 agosto 1526, su istanza del vicario del Cardinale Pisani. Qualche anno prima si era già addottorato in Arti, corrispondente ad una laurea in filosofia, che inglobava un panorama generale delle scienze, e quindi probabilmente anche della matematica; ma non vi sono riscontri espliciti del fatto che egli abbia seguito corsi universitari di tale materia. Quella prima laurea Cardano l'aveva conseguita all'università di Venezia, ateneo di costo assai più basso. La sua vita di studente era cominciata nel 1520 all'università di Pavia, per lui più vicina, fin quando la situazione non diventò rischiosa per una delle periodiche guerre tra francesi e spagnoli combattuta sul suolo d'Italia; l'università stessa fu addirittura chiusa per la terribile pestilenza portata dalle truppe francesi.

Fin da giovane Cardano aveva appreso nozioni di matematica, essendo stato introdotto in tali studi dal padre, che dopo i dodici anni gli aveva spiegato i primi sei libri di Euclide; questo insegnamento paterno fu molto stimolante, in quanto venivano lasciati al ragazzo gli argomenti che poteva capire da solo. La sua prima opera inerente alla mate-

2. *Cardano kaj aritmetiko*

En unu el ĉi malgrandaj verkoj Cardano instruas aritmetikon, je nivelo de komencantoj. Li neniam instruis oficiale matematikon en la universitato, kie male li estis profesoro pri medicino, kaj ĉiuj liaj kvereloj kaj kontrastoj kun la kolegoj koncernis aspektojn tute praktikajn de ĉi-tiu scienco. Tamen Cardano publikigis ankaŭ diversajn teoriajn studojn, el kiu unu pri venenoj kaj respektivaj kontraŭvenenoj (*De venenis*, 1564), kiu longe restis poste kiel tre aŭtoritata faka teksto. La doktoreco pri medicino estis al li donita en Padovo, freŝe veninta sub la regadon de la Respubliko de Venecio, en la Katedralo, dimanĉon la 13an de aŭgusto 1526, laŭ propono de la vikario de Kardinalo Pisani. Kelkajn jarojn pli frue li estis jam doktoriĝinta pri Artoj, responda al doktoriĝo pri filozofio, kiu enhavis ĝeneralan panoramon pri la sciencoj, kaj do probable ankaŭ pri matematiko; sed ne estas dokumentitaj pruvoj, ke li sekvis universitatajn kursojn pri tiu fako. Tiun unuan doktorecon Cardano estis akirinta ĉe la universitato de Venecio, universitato tre pli malmultekosta. Lia studenta vivo estis komenciĝinta en 1520 ĉe la universitato de Pavia, por li pli proksima, ĝis la situacio iĝis riska pro unu el la periodaj militoj inter francoj kaj hispanoj okazantaj sur itala tereno; la universitato mem estis eĉ fermita pro la terura pesto alportita de la francaj trupoj.

Jam kiel junulo Cardano estis akirinta nociojn pri matematiko, enkondukite en tiun fakon de la patro, kiu post lia dekdua jaro eksplikis al li la unuajn ses librojn de Eŭklido; ĉi patra instruado estis tre stimula, ĉar al la knabo estis lasataj la temoj kiujn li povis kompreni mem. Lia unua verko koncernanta matematikon estis verkita kiam li estis ankoraŭ studento en Padovo: temis pri libreto en

matica fu scritta quando era ancora studente a Padova: era un libretto in italiano, oggi perduto, che iniziava con le parole *Non per vitio alcuno*, e riguardava la probabilità. Gli fu ispirato dalla sua passione per il gioco dei dadi, degli astragali e delle carte; in tali giochi era spesso dilapidatore di capitali, ma più spesso vincitore di fortune, arrotondando in tal modo i suoi guadagni. Le sue scoperte sulla probabilità furono poi oggetto di un'opera posteriore, *De ludo aleae*, rimasta a lungo manoscritta, e quindi pubblicata soltanto nell'*Opera omnia*: in essa sono raccolti e sistemati in vera teoria alcuni principi matematici generali applicati allo studio dei giochi. Tra questi, è di grandissima rilevanza la prima formulazione assolutamente generale della *legge dei grandi numeri*, che poi fu enunciata, in casi meno generali, da Giacomo Bernoulli un secolo e mezzo dopo, e che fu dimostrata soltanto nel 1924 da A. Khintchine.

Subito dopo la laurea (era da poco deceduto il padre) Cardano si mise a cercare lavoro e andò a Piove di Sacco, paese in provincia di Padova, dove si mantenne tenendo una condotta medica; si sposò con Lucia Bandarin ed iniziò la sua vita familiare, che si arricchì presto di tre figli. Ma dopo qualche anno, non potendo mantenere la famiglia con i soli proventi della professione medica in un paesino, nel 1532 ritornò in Lombardia, trasportandovi la famiglia. Qui gli fu sulle prime interdetta l'attività di medico, e Cardano sbarcò il lunario per alcuni anni insegnando privatamente matematica a bambini e ragazzi, in una scuola fondata da un allievo del padre e dove già quest'ultimo aveva insegnato precedentemente. Il suo insegnamento era di un livello corrispondente alla scuola elementare e media inferiore. Durante questo periodo uscirono le opere principali di matematica di Cardano: la prima fu *Practica arithmetica* (Milano, 1539), che introduce la notazione posizionale dei numeri interi, derivata dagli indiani attraverso gli arabi, tratta della rappresentazione delle frazioni, e fornisce alcune regole per il calcolo approssimato delle radici quadrate e cubiche. Del 1545 è l'*Ars magna*, in cui ven-

la itala, nun perdita, komenciĝanta per la vortoj *Non per vitio alcuno* (Pro neniu malvirto), kaj koncernis la probablon. Ĝi estis inspirita de lia pasio por la ludo per ĵetkuboj, astragaloj kaj kartoj; en tiaj ludoj li estis ofte malŝparanto de kapitaloj, sed pli ofte gajnanto de grandaj sumoj, per kiuj li rondigis siajn enspezojn. Liaj malkovroj pri probablo estos temo de posta verko, *De ludo aleae* (Pri hazardludo), restinta longe en manuskripto, kaj fine eldonita nur en la *Opera omnia*: en ĝi estas kolektitaj kaj ordigitaj en vera teorio kelkaj ĝeneralaj matematikaj principoj aplikataj al la studo de la ludoj. Inter ĉi-tiuj estas ege rimarkinda la unua formulado tute ĝenerala de la *leĝo de la grandaj nombroj*, kiu poste estis eldirita, en malpli ĝeneralaj kazoj, de Jakobo Bernoulli unu jarcenton kaj duonon poste, kaj kiu estis pruvita nur en 1924 de A. Khintchine.

Tuj post la doktoriĝo (lia patro estis mortinta antaŭnelonge) Cardano ekserĉis laboron kaj iris al Piove di Sacco, urbeto apud Padovo, kie li sin vivtenis kiel distrikta kuracisto; li edziĝis al Lucia Bandarin kaj komencis familian vivon, baldaŭ riĉigitan de tri gefiloj. Sed post kelkaj jaroj, ne povante vivteni la familion per la nuraj enspezoj kiel kuracisto en urbeto, li en 1532 revenis en Lombardion, kunportante la familion. Ĉi-tie oni, komence, malpermesis al li aktivadon kiel kuracisto, kaj Cardano modeste sin vivtenis dum kelke da jaroj instruante private matematikon al infanoj kaj knaboj, en lernejo fondita de lernanto de lia patro, kaj kie ĉi-lasta estis jam instruinta antaŭe. Lia instruado estis je nivelo responda al elementa lernejo kaj malsupera mezgrada. Dum ĉi periodo aperis la ĉefaj matematikaj verkoj de Cardano: la unua estis *Practica arithmetica* (Milano, 1539), kiu enkondukas la pozician notacion de la entjeroj, venantan de la hindoj tra la araboj, pritraktas la reprezenton de la frakcio, kaj donas kelkajn regulojn por la aproksima kalkulo de la kvadrataj kaj kubaj radikoj. En 1545 aperas *Ars magna*, en

gono pubblicati i metodi di soluzione delle equazioni di terzo e quarto grado, tanto che tale anno è spesso preso come inizio della matematica moderna (Luca Pacioli nel 1494 aveva dichiarato che la ricerca delle soluzione delle equazioni di terzo grado era un problema irresolubile). Tali scoperte peraltro non sono tutta farina del suo sacco: la soluzione delle equazioni di terzo grado, almeno quando i coefficienti sono tutti positivi, era già stata scoperta trent'anni prima dal bolognese Scipione del Ferro, morto nel 1526. Questi non pubblicò la scoperta, ma in punto di morte la rivelò ad un suo discepolo, Antonio Maria Fior; poi l'idea si diffuse, anche grazie ad una sfida tra il Fior e un altro matematico bresciano, Nicolò Fontana, detto Tartaglia, che insegnava a Venezia: le questioni che costoro si posero vicendevolmente diventarono di dominio pubblico tra i matematici, e stimolarono studi e scoperte in casi sempre meno particolari. Cardano in questo, come su altri temi, fu un grande divulgatore piuttosto che uno scopritore; ma ebbe sempre tuttavia il merito di saper generalizzare risultati che altri avevano trovato in casi particolari.

3. *Il "Tractatus de integris"*

In questo periodo vivace e pieno di stimoli si colloca l'opera *Artis arithmeticae tractatus de integris*, che però vide la luce a stampa soltanto nella citata edizione lionese dell'opera completa nel 1663, nel volume decimo dedicato alla *Miscellanea*. In tale edizione il *Tractatus de integris* occupa 11 pagine e mezza, dalla pag. 117 alla pag. 128, ed è seguito da un lavoro di anatomia. Tale trattato non ha mai avuto traduzioni, se si eccettua un breve passo iniziale tradotto in esperanto e apparso nel dicembre 2001 in una rivista letteraria.

Da un punto di vista metodologico e didattico, Cardano ha un'ottima impostazione: dovendo vivere della paga degli alunni, la qualità dell' insegnamento era essenziale per non perdere clienti o anzi per acquisirne di nuovi. Il trattato si divide in cinque capitoli.

Il primo è un'introduzione che magnifica i meriti della numerazione e ne elenca l'uti-

kiu estas publikigitaj la metodoj de solvado por la ekvacioj de tria kaj kvara grado, tiel ke tiu jaro estas ofte konsiderata kiel komenco de la moderna matematiko (Luca Pacioli en 1494 estis deklarinta che la serĉo pri solvo de la triagradaj ekvacioj estas problemo nesolvebla). Tiuj malkovroj cetere ne estis ĉiuj liaj: la solvo de la triagradaj ekvacioj, almenaŭ kiam ĉiuj koeficientoj estas pozitivaj, estis jam malkovrita tridek jarojn antaŭe de bolonjano Scipione del Ferro, mortinta en 1526. Li ne publikigis sian malkovron, sed en mortohoro li konfidis ĝin al unu el siaj disĉiploj, Antonio Maria Fior; poste la ideo disvastiĝis, ankaŭ pro defio inter Fior kaj alia matemetikisto el Brescia, Nicolò Fontana, nomita Tartaglia, instruisto en Venecio: la problemoj, kiujn la du proponis al si reciproke, iĝis vaste konataj inter la matematikistoj, kaj stimulis studojn kaj malkovrojn en kazoj ĉiam malpli specifaj. Cardano en tio, samkiel pri aliaj temoj, estis granda disvastiganto pli ol malkovrinto; sed li havis ĉiam la meriton ĝeneraligi la rezultojn trovitajn de aliaj en apartaj kazoj.

3. *La "Tractatus de integris"*

En ĉi-tiu periodo vigla kaj stimuloplena lokiĝas la verko *Artis arithmetica tractatus de integris*, kiu tamen aperis prese nur en la menciita liona eldono de la plena verkaro en 1663, en la deka volumo dediĉita al la *Miscelaneo*. En tiu eldono la *Tractatus de integris* okupas 11 paĝojn kaj duonon, de paĝo 117 ĝis paĝo 128, kaj ĝin sekvas verko pri anatomio. De tiu traktaĵo aperis neniu traduko, se oni esceptas mallongan komencan pecon tradukitan en Esperanton, kaj aperintan en decembro 2001 en literatura revuo.

De metodologia kaj didaktika vidpunkto, Cardano havas tre bonan strukturon: ĉar li devis vivi el la pago de la lernantoj, la kvalito de la instruado estis esenca por ne perdi klientojn aŭ eĉ por akiri novajn. La traktaĵo dividiĝas en kvin ĉapitrojn.

La unua estas enkonduko kiu laŭdas la meritojn de nombrado kaj listigas la tute

lizzo generalizzato da parte di tante categorie di persone: poeti, oratori, medici, legulei, agricoltori, architetti, comandanti militari. Nel parlare della precisione di tale arte dal punto di vista della razionalità l'autore cita anche l'univocità dei simboli e delle espressioni che vi ricorrono, facendo un paragone tra i romani e i barbari. Segue quindi una attenta definizione delle notazioni che egli chiama *obscuriores*. Infatti spiega alcune locuzioni e notazioni, e alcuni sinonimi, citando sia il termine in volgare che quello in latino. Viene spiegato il segno *R* per la radice; il denominatore è indicato con *Den*, il numeratore con *Num*, il numero con *Nu*. Interessante è il simbolo *P : ig* con cui viene denotata la "parte ignota", cioè gli "esimi", e questi sono quello che diciamo quando ci è noto il numeratore, e pure la scrittura del denominatore, ma non ne conosciamo il valore; ad esempio, quando il numeratore è 10 e il denominatore è la somma di radice di tre più radice di due meno 1 non conosciamo il valore dell'espressione, e quindi diciamo che la frazione vale 10 P : ig.

Cardano era eminentemente pratico, e finalizzato alla pratica era il suo insegnamento; quindi anche l'aritmetica che egli spiega è finalizzata al commercio, alla misurazione, alla somma di unità monetarie e loro sottomultipli. Naturale è quindi la spiegazione di alcune unità di misura economiche e monetarie: *S'* indica il solido, cioè l'asse; *Lib* è la libbra, cioè venti assi; *d'* è la moneta minima, cioè il dodicesimo di asse. Egli nota anche che i latini usavano *HS* come simbolo del sesterzio (moneta romana d'argento, dapprima del valore di due assi e mezzo, e poi di quattro assi), mentre non vi è nessun termine in volgare che lo esprima. Si può notare una certa attenzione per i concetti di numero e le loro espressioni che hanno le varie lingue, segno di diverso atteggiamento dei vari popoli nei confronti della vita pratica.

Il secondo capitolo è dedicato ad una breve e riassuntiva storia dell'aritmetica, e fornisce versioni della nascita della numerazione se-

ĝeneralan uzon fare da multaj kategorioj de personoj: poetoj, oratoroj, kuracistoj, juristoj, kamparanoj, arkitektoj, militaj estroj. Parolante pri precizeco de tiu arto laŭ vidpunkto de racio la aŭtoro mencias ankaŭ la unusencecon de la simboloj kaj de la esprimoj uzataj, farante komparon inter romanoj kaj barbaroj. Sekvas poste atenta difino de la notacioj, kiujn li nomas *obscuriores*. Fakte li eksplikas kelkajn lokuciojn kaj notaciojn, kaj kelkajn sinonimojn, menciante kaj la vulgaran terminon kaj la latinan. Estas eksplikata la signo *R* por la radiko; la denominatoro estas indikata per *Den*, la numeratoro per *Num*, la nombro per *Nu*. Interesa estas simbolo *P : ig*, per kiu estas indikata la "nekonata parto", tio estas la "onoj", kaj tio estas kion ni diras, kiam estas al ni konata la numeratoro, kaj ankaŭ la skribo de la denominatoro, sed ni ne konas ĝian valoron; ekzemple kiam la numeratoro estas 10 kaj la denominatoro estas la sumo de la radiko de tri plus la radiko de du minus 1, ni ne konas la valoron de la esprimo, kaj do ni diras, ke la frakcio valoras 10 P : ig.

Cardano estis ĉefe praktika, kaj celanta praktikon estis lia instruado; do ankaŭ la matematiko, kiun li instruas, estas orientita al komerco, al mezurado, al la sumo de monunuoj kaj ĝiaj divizoroj. Natura estas do la klarigo de kelkaj ekonomiaj kaj monaj unuoj: *S'* indikas la solidon, t.e. la ason; *Lib* estas la funto, do dudek asoj; *d'* estas la minimuma monero, t.e. dekduono de aso. Li rimarkas ankaŭ, ke la latinoj uzis *HS* kiel signon de la sesterco (roma arĝenta monero, antaŭe kun valoro de du kaj duona asoj, poste de kvar asoj), dum en la vulgara lingvo ne ekzistas vorto por tio. Oni povas rimarki ian atenton por la konceptoj de nombro kaj ĝiaj esprimoj, kiujn havas la diversaj lingvoj, signo de malsama sinteno de la diversaj popoloj fronte al la praktiko.

La dua ĉapitro estas dediĉita al mallonga kaj resuma historio de aritmetiko, kaj prezentas versiojn de la naskiĝo de numerado

condo le tradizioni degli ebrei, dei greci e dei romani. Ognuno di questi popoli ascrive ad un proprio membro il merito di aver introdotto i numeri: gli ebrei lo attribuiscono ai nipoti di Adamo che furono progenie di Seth, e Cardano ritiene che ciò sia plausibile, dato che "la numerazione è nata con gli uomini". Altri dicono che sia stato Abramo, altri Mercurio.

Scendendo nella storia, viene magnificato il contributo dato da numerosi matematici di diversa nazionalità, dai greci Pitagora ed Euclide ad altri meno noti. Cardano riporta una fama di tale Eupompo, del quale però nessuno scritto è giunto fino a noi. Un riconoscimento è dato anche ai barbari, tra cui Nicola Rabda, che hanno raccolto elementi dagli indiani e li hanno diffusi in occidente. Anche la matematica araba è menzionata. Venendo ai latini, viene citato Boezio, di cui peraltro nessuna opera matematica è giunta fino a noi, mentre fu celebre per le traduzioni dei filosofi greci e per il *De consolatione philosophiae*, scritto in carcere prima dell'esecuzione della condanna a morte. Seguono altri fino ad arrivare ai contemporanei, tra i quali Cardano cita, riconoscendo loro grandi meriti, il bolognese Scipione del Ferro e il bresciano Nicolò Tartaglia, con il quale, egli lo ricorda con rammarico, ebbe una disputa sulla priorità di certe scoperte. Ma qui Cardano rivendica il numero delle proprietà nuove scoperte: gli otto capitoli scritti dal Tartaglia furono da lui portati a sessantasette, e le proprietà dei numeri, a malapena quaranta in Tartaglia, sono state portate a cinquecento. A sé e alla sua scuola egli rivendica l'aver trovato non meno cose di quante ne abbia trovate Euclide. Cardano esalta il lavoro di scuola: tesse le lodi del suo amanuense Ludovico Ferrari (che scoprì la soluzione delle equazioni di quarto grado, e morì probabilmente avvelenato dalla sorella); e Gabriele Aratore non fu da meno, esortando gli altri nel lavoro e reperendo libri di cui prima non si aveva disponibilità.

Un'attenzione particolare Cardano dedica alla lingua e alla terminologia. L'etimologia

laŭ la tradicioj de la hebreoj, grekoj kaj romanoj. Ĉiu el ĉi popoloj atribuas al iu sia ano la meriton esti enkondukinta la nombrojn: la hebreoj atribuas tion al la nepoj de Adamo, kiuj estis idaro de Seth, kaj Cardano taksas tion verŝajna, ĉar "numerado naskiĝis kun la homoj". Aliaj diras, ke estis Abrahamo, aliaj Merkuro.

Malsuprenvenante laŭ la historio, estas laŭdata la kontribuo donita de pluraj matematikistoj diversnaciaj, ekde la grekoj Pitagoro kaj Eŭklido ĝis aliaj malpli konataj. Cardano raportas famon de ia Eŭpompo, de kiu tamen neniu verko atingis nin. Agnosko estas donita ankaŭ al la barbaroj, inter kiuj Nicola Rabda, kiuj kolektis elementojn de la hindoj kaj ilin disvastigis en la Okcidento. Ankaŭ la araba matematiko estas menciita. Inter la latinoj estas menciita Boetius, de kiu tamen neniu matematika verko, dum li estis fama pro la tradukoj de la grekaj filozofoj kaj pro la *De consolatione philosophiae*, verkita en karcero antaŭ la ekzekuto de la mortverdikto. Sekvas aliaj ĝis la samtempuloj, inter kiuj Cardano mencias, agnoskante iliajn grandajn meritojn, la bolonjanon Scipione del Ferro kaj Nicolò Tartaglia el Brescia, kun kiu, li memoras tion kun bedaŭro, li disputis pri prioritato de kelkaj malkovroj. Sed ĉi-tie Cardano pretendas agnoskon por la nombro de novaj malkovroj: la ok ĉapitroj verkitaj de Tartaglia estis de li ampleksigitaj ĝis sesdek sep, kaj la proprecoj de la nombroj, apenaŭ kvardek en Tartaglia, estis pliigitaj ĝis kvincent. Por si kaj sia skolo li postulas agnoskon, ke ili malkovris ne malpli multajn aferojn ol Eŭklido. Cardano laŭdas la laboron de sia skolo: li laŭdas sian skribiston Ludovico Ferrari (kiu malkovris la solvon de la ekvacioj de kvara grado, kaj mortis probable venenita de sia fratino); kaj Gabriele Aratore ne estis malpli grava, kuraĝigante la aliajn en la laboro kaj trovante librojn kiuj antaŭe ne estis disponeblaj.

Apartan atenton Cardano dediĉas al la lingvo kaj al la terminologio. La etimologio

di "arithmetica" risale al verbo greco 'αριθμέω (numerare, contare, calcolare), e Cardano insiste sull'unità quale fonte primaria di tutti i numeri e di tutti i calcoli: Platone aveva parlato soltanto di numeri interi. E del pari Aristotele, Pitagora, Euclide, i quali dai numeri interi hanno ricavato i nomi per i numeri fratti, irrazionali (detti in latino *surdi*) e per le parti ignote. Leonardo Pisano ha importato dall'India le cifre (in latino: *notae*, oppure *litterae*) che includono anche lo zero (in latino: *circulus*), e la numerazione posizionale, che ricalca la scrittura da destra a sinistra degli ebrei.

Il capitolo terzo racconta i vari modi di scrivere i numeri interi, e presenta i nomi delle decine, centinaia e migliaia. I latini non avevano un termine specifico oltre il mille, e scrivevano gli altri numeri componendo i termini precedenti fino a centomila. Segue la lista di tutti i numeri da uno a cento, scritti per esteso: Cardano non concede niente all'immaginazione e non affida nulla all'analogia, secondo la quale i numeri delle decine a partire dalla terza si esprimono tutti in maniera assolutamente analoga; egli li enumera tutti uno per uno, occupando oltre mezza colonna a stampa. I latini non usavano molto spesso i numeri sopra il mille, tanto che non vi era una dizione univoca: *bis mille* era equivalente a *duo millia*, *centies mille* a *centena millia*. I numeri superiori sono ancora più incerti: *ducenta millia* è usato accanto a *bis centena millia*, e *millies mille* è altra dizione di *decies centena millia*. Ma centomila è il massimo numero che i latini sapevano dire senza avverbi. Altri popoli numeravano di più dei latini, che si fermavano al mille come vocabolo singolo: i greci avevano le miriadi, termine che indicava diecimila, e gli ebrei avevano *ribo*, che significava o ventimila o centomila. Cardano classifica le civiltà e le società a seconda di quanto si sanno spingere nell'esprimere i numeri, e quella che sa spingersi più avanti è considerata più avanzata. Vengono poi presentate delle avvertenze perché i bambini tengano più facilmente a memoria la successione dei nomi delle decine e delle centinaia.

de "arithmetica" venas de la helena verbo 'αριθμέω (numeradi, nombradi, kalkuli), kaj Cardano insistas pri la unuo kiel primara fonto de ĉiuj nombroj kaj ĉiuj kalkuloj: Plato parolis nur pri entjeroj. Kaj same Aristotelo, Pitagoro, Eŭklido, kiuj el la entjeroj devenigis la frakciojn, la neracionalojn (latine: *surdi*), la nekonatajn onojn. Leonardo el Pizo enportis el Hindio la ciferojn (latine: *notae*, aŭ *litterae*), inkluzivantajn ankaŭ la nulon (latine: *circulus*), kaj la pozician nombradon, kiu paŭsas la skribon de dekstre al maldekstre de la hebreoj.

La tria ĉapitro rakontas la malsamajn manierojn skribi la entjerojn, kaj prezentas la nomojn de la dekoj, centoj kaj miloj. La latinoj ne havis specifan terminon preter mil, kaj skribis la ceterajn nombrojn kunmetante la antaŭajn ĝis cent mil. Sekvas la listo de ĉiuj nombroj de unu ĝis cent, skribitaj plene: Cardano nenion lasas al la imagkapablo kaj konfidas nenion al analogio, laŭ kiu la nombroj de la dekoj ekde la tria esprimiĝas ĉiuj laŭ maniero absolute analoga; li nombras ĉiujn unuope, plenigante pli ol duonan presitan kolumnon. La latinoj ne uzis tre ofte la nombrojn preter mil, tiel ke eĉ ne estis ununura maniero: *bis mille* egalis al *duo millia*, *centies mille* al *centena millia*. La pli grandaj nombroj estis eĉ pli necertaj: *ducenta millia* estis uzata apud *bis centena millia*, kaj *millies mille* estas alia dirmaniero di *decies centena millia*. Sed cent mil estas la maksimuma nombro, kiun la latinoj kapablis diri sen adverboj. Aliaj popoloj nombradis pli ol la latinoj, kiuj haltis je mil kiel unuopa termino; la helenoj havis la miriadojn, termino kiu indikis dekmil, kaj la hebreoj havis *ribo*, kiu indikis aŭ dudek mil aŭ cent mil. Cardano klasas la civilizojn kaj la sociojn laŭ kiom ili kapablas pluiri en la nombrado, kaj tiu kapablanta iri pli antaŭen estas pli progresinta. Estas poste donataj iuj avertoj, por ke la infanoj pli facile parkeru la sinsekvon de la nomoj de dekoj kaj centoj.

È specificato cosa siano i numeri primi, con alcuni esempi, e quali invece siano quelli non primi. La radice quadrata è presentata come il numero di base di quello che risulta avendo fatto il quadrato, e segue una serie di quadrati, come quattro, nove, quarantanove, centoventuno. La radice quadrata viene anche detta *lato* (del quadrato costruitovi sopra). I cubi sono spiegati più tramite alcuni esempi molto semplici che dal punto di vista teorico. Interessante è il modo di verifica se un numero è primo: intanto deve essere dispari, e poi non deve terminare per 5. Sia ad esempio 113 il numero da verificare. Cerchiamo la radice quadrata (il *lato*) del quadrato perfetto immediatamente precedente, che è dieci, e poi vediamo se tredici è il quadrato di tre o di sette, essendo già stati esclusi il due e il cinque. Poiché né l'uno né l'altro ha per quadrato tredici, allora 113 è primo.

Segue la descrizione e la spiegazione della notazione posizionale, delle cifre e dell'importanza della scrittura dello zero, e come esempio viene presentato il numero 42754380604731, diviso in gruppi da cinque cifre contenenti ciascuno unità, decine, centinaia, migliaia e miriadi; la cifra 5 è ad esempio associata a mille migliaia di miriadi, mentre la prima cifra a sinistra indica quattromila migliaia di migliaia di decine di migliaia. Numeri così grandi sono tuttavia poco istruttivi, nonostante la spiegazione di Cardano sia estremamente precisa; ma sono costruiti, e i termini stessi sono costruiti in maniera non univoca, dato che i popoli antichi non arrivavano mai a simili quantità. La spiegazione della notazione indiana che utilizza il prodotto (di fatto le potenze di dieci) è molto chiara, e tale numerazione hanno anche i Galli, mentre romani, greci ed ebrei, che usavano una notazione additiva, non avevano bisogno dello zero; peraltro Cardano in fondo al capitolo nota che non si usa scrivere lo zero al primo posto a sinistra.

Un'altra presentazione della scrittura di un numero è quella con la suddivisione in terne di cifre (unità, decine, centinaia) separate da una virgola: tale terna è detta *casula* (casetta,

Estas detaligite kio estas la primoj, kun kelkaj ekzemploj, kaj kiuj male ne estas primoj. La kvadrata radiko estas prezentata kiel la nombro de la bazo de tio kio rezultas, kiam oni kvadratigas; sekvas serio de kvadratoj, kiel kvar, naŭ, kvardek naŭ, cent dudek unu. La kvadrata radiko estas nomata ankaŭ *latero* (de la kvadrato konstruita sur ĝi). La kuboj estas eksplikitaj pli pere de ezemploj tre simplaj ol tra la teorio. Interesa estas la maniero kontroli ĉu iu nombro estas primo: unue ĝi devas esti malpara, kaj due ĝi ne devas finiĝi per 5. Estu ekzemple 113 la nombro kontrolota. Ni serĉu la kvadratan radikon (la *lateron*) de la perfekta kvadrato tuj antaŭa, kiu estas dek, kaj poste ni kontrolu, ĉu 13 estas la kvadrato de tri aŭ de sep, ĉar jam estis ekskluditaj 2 kaj 5. Ĉar neniu el la du havas kiel kvadraton 13, tiam 113 estas primo.

Sekvas la priskribo kaj la klarigo de la pozicia notacio, de la ciferoj, kaj de la graveco de la skribo de la nulo, kaj kiel ekzemplo estas prezentata la nombro 42754380604731, dividita laŭ kvinciferaj grupoj, enhavantaj ĉiu unuojn, dekojn, centojn, milojn kaj miriadojn; ekzemple cifero 5 estas ligita al mil miloj da miriadoj, dum la unua cifero maldekstre indikas kvar mil milojn da miloj da dekoj da miloj. Tiom grandaj nombroj estas tamen ne multe instruaj, kvankam la klarigo de Cardano estas ekstreme preciza; sed ili estas konstruitaj, kaj la terminoj mem estas konstruitaj en ne unusenca maniero, ĉar la antikvaj popoloj neniam alvenis al tiomaj kvantoj. La klarigo de la hinda notacio utiliganta la produton (fakte la potencojn de dek) estas tre klara, kaj tian nombradon havas ankaŭ la Gaŭloj, dum romanoj, helenoj kaj hebreoj, uzantaj adician notacion, ne bezonis la nulon; ĉiukaze Cardano ĉapitrofine rimarkas, ke ne estas kutime skribi la nulon en la unua loko maldekstre.

Alia prezento de la skribo de nombro estas tiu kun la subdivido laŭ cifertriopoj (unuoj, dekoj, centoj) apartigitaj de komo: tia triopo estas nomata *casula* (dometo, kabano). La

capannina). Gli allievi sapranno meglio distinguere le cifre quando vengono raggruppate così. Questo piccolo artificio, di cui Cardano fu non l'ideatore ma il divulgatore, è rimasto fino ai giorni nostri; i romani non ne avevano bisogno, in quanto non arrivarono mai a contare numeri così grandi, perché mai usarono pesi o sesterzi in tale quantità.

Il quarto capitolo riguarda l'addizione, prossima alla numerazione, e le altre operazioni elementari, e viene subito annunciato l'uso di una di queste operazioni per verificare la correttezza del risultato delle altre. Per insegnare l'addizione a livello elementare, Cardano propone una "tavola per l'addizione" dei numeri inferiori al dieci, dove si leggono le somme di due addendi (vd. Fig. 1). La spiegazione dell'uso di tale tavola è precisa fino alla pedanteria: sono esposti alcuni facilissimi calcoli, che Cardano spiega per filo e per segno, come fossero esempi fatti ad un pubblico. Lo scritto è chiaro e di una vivezza come se fosse una lezione parlata piuttosto che una dispensa. È costante l'incoraggiamento al lettore, a cui l'autore si rivolge direttamente, dicendogli che il progredire nella conoscenza dell'aritmetica è facile.

lernantoj kapablos pli bone distingi la ciferojn kiam ili estas apartigitaj tiel. Ĉi malgranda artifiko, pri kiu Cardano ne estis la eltrovinto, sed la disvastiginto, restis ĝis niaj tempo; la romanoj ne bezonis tion, ĉar ili neniam alvenis al kalkulado per tiom grandaj nombroj: ili ja neniam uzis pezojn aŭ sestercojn en tia kvanto.

La kvara ĉapitro rilatas al adicio, proksima al la nombrado, kaj al la aliaj elementaj operacioj, kaj estas tuj anoncita la uzo de iu el ĉi operacioj por kontroli la ĝustecon de la rezulto de la aliaj. Por instrui la adicion je elementa nivelo Cardano proponas "adician tabelon" de la nombroj malpli grandaj ol dek, kie oni legas la sumon de du adiciatoj je la kruciĝo de la koncernaj linio kaj kolumno (Bildo 1). La klarigo de la uzo de tia tabelo estas preciza ĝis pedanteco: estas prezentataj iuj facilegaj kalkuloj, kiujn Cardano klarigas tute detale, kvazaŭ ili estus ekzemploj faritaj antaŭ publiko. La skribaĵo estas klara kaj verva kvazaŭ ĝi estus parola leciono anstataŭ lecionnotoj. Konstanta estas la kuraĝigo al la leganto, al kiu la aŭtoro sin adresas rekte, dirante ke progresado en la kono de aritmetiko estas facila.

10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	0
11.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1
12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2
13.	12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3
14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4
15.	14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.	5
16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.	7.	6
17.	16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.	7
18.	17.	16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.	9.	8
19.	18.	17.	16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.	9
20.	19.	18.	17.	16.	15.	14.	13.	12.	11.	10

Fig. 1: Tabella additiva

Bildo 1: Adicia tabelo

L'addizione viene insegnata con la notazione posizionale, e non viene neppure tentato l'insegnamento dell'addizione con le notazioni greche o romane; viene insegnato con cura il riporto, e la scrittura dello zero quando viene completata la decina. Il riporto è esemplificato in un modo piuttosto insolito, pensando ad un grande numero di addendi che possano dare, su una singola cifra, una somma di centocinquanta, e Cardano insegna a riportare quindici e a sommarlo alle cifre di posto più avanzato a sinistra. Anche per le somme di numeri grandi, Cardano indica l'utilità della tabella di addizione, ancorché questa si estenda soltanto per addendi minori di dieci; ma l'addizione si può fare tra tali addendi (ultime cifre a destra) e poi tenere a mente il riporto, e fare l'addizione delle decine con la stessa tabella.

Un interessante complemento è la *prova del nove* dell'addizione, dove al posto di ogni singolo addendo viene sostituito il resto della sua divisione per nove: vengono proposti, e dettagliatamente spiegati, vari esempi. Con lo stesso metodo viene anche spiegata la prova "del sette", che richiede di calcolare tutti i resti della divisione per sette dei singoli addendi. Tale "prova" è molto più difficile dal punto di vista pratico che non la prova del nove, ancorché dal punto di vista del principio esse siano assolutamente analoghe. Infatti Cardano non dice che la prova diventa facile per il numero nove, perché il resto della divisione per tale numero si ottiene sommando le cifre, comodità che non sussiste nella divisione per sette. Nei suoi esempi effettua la divisione per nove, e guarda il resto, come fa dopo per quella del sette. Egli raccomanda di effettuarle entrambe, data l'estrema improbabilità che sia sbagliato il risultato dell'addizione se entrambe le prove del nove e del sette danno risultati giusti.

L'insegnamento successivo è quello dell'addizione quando le singole unità di misura non sono multiple di dieci: l'aureo è di sei libbre e dodici assi; a Milano l'asse è di dodici monetine (*parvi nummi*), e la libra è di dodici assi. L'addizione in colonna non è agevole, perché il riporto non è più quando si supera dieci o

Adicio estas instruata per la pozicia notacio, kaj eĉ ne estas provo pri instruo per la helenaj aŭ romaj notacioj; estas zorgeme instruata la reteno, kaj la skribo de la nulo kiam la deko estas kompletigita. La reteno estas ekzempligita en sufiĉe nekutima maniero, kun la supozo pri granda nombro da adiciatoj, kiuj povas doni, ĉe unuopa cifero, cent kvindek kiel sumon, kaj Cardano instruas reteni dek kvin kaj sumi ĝin al la ciferoj de pli posta loko maldekstre. Ankaŭ por la sumo de grandaj nombroj, Cardano indikas la utilon de la adicia tabelo, kvankam ĉi tiu koncernas nur adiciatojn malpli grandajn ol dek; sed adicion oni povas fari inter tiaj adiciatoj (lastaj ciferoj dekstre) kaj poste parkeri la retenon, kaj fari la adicion de la dekoj per la sama tabelo.

Interesa komplemento estas la *pruvkontrolo per naŭ* de la adicio, kie en la loko de ĉiu unuopa adiciato estas metita la resto de ĝia divido laŭ naŭ: estas proponitaj, kaj detale, klarigitaj, pluraj ekzemploj. Per la sama metodo estas ankaŭ klarigita la pruvkontrolo "per sep", kiu postulas la kalkuladon de ĉiuj restoj de la divido laŭ sep de la unuopaj adiciatoj. Tia "pruvkontrolo" estas ege pli malfacila laŭ la praktika vidpunkto ol la pruvo per naŭ, kvankam laŭ la principa vidpunkto ili estas absolute analogaj. Fakte Cardano ne diras, ke la pruvkontrolo iĝas facila per numero naŭ ĉar la reston de la divido laŭ tiu nombro oni akiras sumante la ciferojn, kio estas komfortaĵo ne ekzistanta en la divido laŭ sep. En siaj ekzemploj li faras la dividon laŭ naŭ, kaj rigardas la reston, samkiel li faras poste en tiu laŭ sep. Li rekomendas fari ilin ambaŭ, pro la ega malprobablo ke le rezulto de la adicio estas erara, se ambaŭ pruvkontroloj per naŭ kaj sep donas ĝustajn rezultojn.

La posta instruo estas tiu pri adicio kiam la unuopaj mezurunuoj ne estas multobloj de dek: la ora monero estas el ses funtoj kaj dekdu asoj; en Milano la aso estas el dek du moneretoj (*parvi nummi*), kaj la funto estas el dek du asoj. La laŭkolumna adicio ne estas komforta, ĉar la reteno ne estas plu kiam oni supe-

cento, o mille, ma quando si completano ad esempio sestine o dozzine, pur usando la notazione posizionale. Ogni esempio raccontato a parole è poi sempre molto opportunamente illustrato con una tabella che riporta il calcolo esplicito con le cifre.

L'ultimo capitolo rimastoci riguarda la sottrazione, proposta dapprima per multipli di dieci, e poi ancora per situazioni commerciali nelle quali le diverse unità di misura e monete non seguono i multipli di dieci. Il settimo paragrafo termina con dei puntini sospensivi, e ... *Caetera desiderantur* (il resto manca).

L'interesse di Cardano per la numerazione non è espresso solo in questa piccola opera. Nel ben più corposo *De subtilitate* (1550), una grande enciclopedia scientifica che tratta di numerosissime materie, dalla repulsione dei corpi al cielo, dai metalli agli angeli, dall'uomo a Dio, vi è anche proposta una "stenografia" per scrivere gli interi, in cui le varie cifre sono rappresentate da stanghette o quadratini collocati ai lati di un'asta verticale (vd. Fig. 2).

ras dek aŭ cent, aŭ mil, sed kiam oni kompetigas ekzemple sesojn aŭ dekduojn, eĉ uzante la pozician notacion. Ĉiu ekzemplo estas rakontita pervorte kaj poste estas ĉiam tre oportune ilustrita per tabelo enhavanta la eksplicitan kalkulon per la ciferoj.

La lasta ĉapitro restinta rilatas la subtrahon, proponitan antaŭe pri multobloj de dek, kaj poste plu pri komercaj situacioj, en kiuj la diversaj mezurunuoj kaj monunuoj ne sekvas la multoblojn de dek. La sepa paragrafo finiĝas per la interrompa tripunkto, kaj ... *Caetera desiderantur* (la resto mankas).

La intereso de Cardano por la nombrado ne aperas nur en ĉi malgranda verko. En la tre pli konsista *De subtilitate* (1550), granda scienca enciklopedio pritraktanta ege multajn fakojn, de la repuŝo de la korpoj al la ĉielo, de la metaloj al la anĝeloj, de la homo al Dio, estas ankaŭ proponita ia "stenografio" por skribi la entjerojn, en kiu la diversaj ciferoj estas reprezentataj de linietoj aŭ kvadratetoj lokitaj flanke de vertikala stango (Bildo 2).

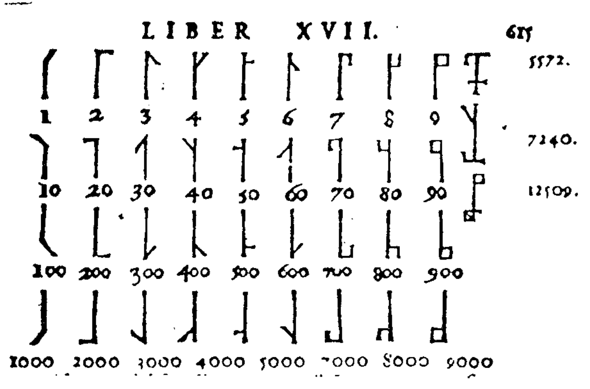


Fig. 2: Stenografia dei numeri. Ai lati si leggono alcuni numeri ottenuti come somme dei numeri di base; la somma viene disegnata tramite una sovrapposizione. Il numero 6000 manca per errore di stampa nell'edizione originale.

Bildo 2: Stenografio de la nombroj. Flanke oni legas iujn nombrojn akiritajn kiel sumojn de bazaj nombroj; la sumo estas desegnita pere de surmeto. Nombro 6000 mankas pro preseraro en la originala eldono.

Tale raffigurazione prendeva certamente spunto dai modi che i commercianti avevano di esprimere i vari numeri toccandosi con il pollice le diverse falangi (vd. Fig. 3).

Tia skribmaniero ĉerpis certe inspiron el la manieroj uzataj de la komercistoj esprimi la diversajn nombrojn tuŝante per la dikfingro la diversajn falangojn (Bildo 3).

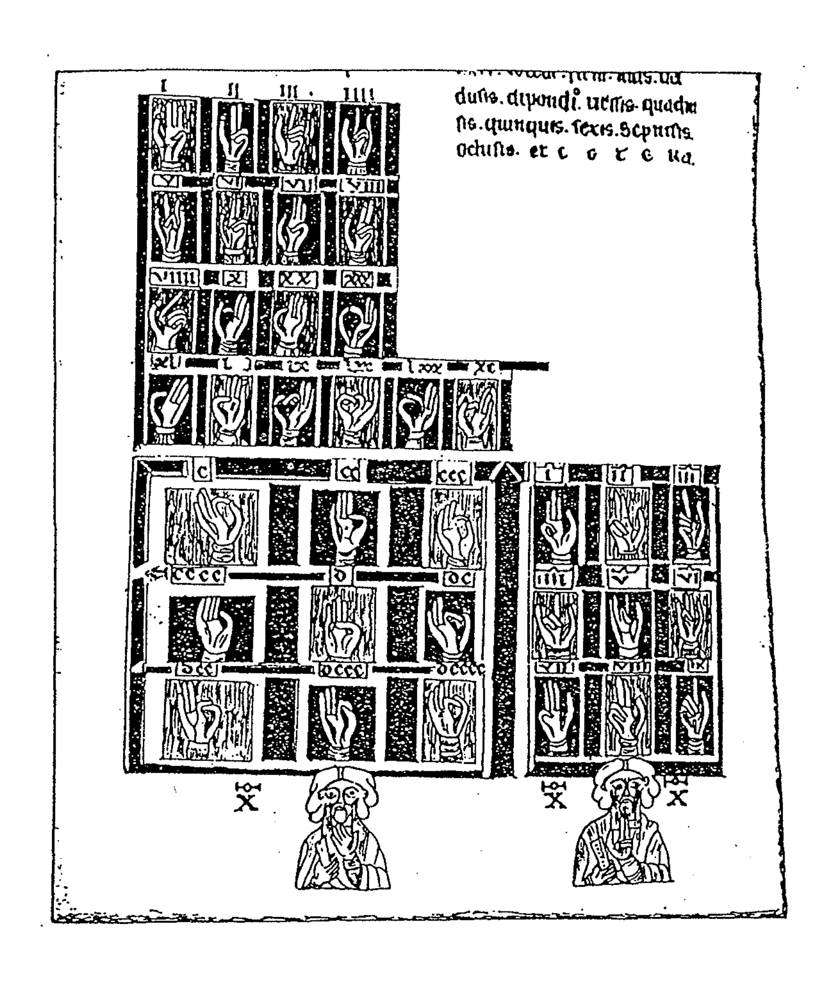


Fig. 3: Da un codice spagnolo del 1210 circa, della Biblioteca pubblica di Lisbona: rappresentazione dei numeri tramite le dita.

Bildo 3: El hispana kodekso de ĉ. jaro 1210, el la publika Biblioteko de Lisbono: reprezento de la nombroj pere de la fingroj.

Nonostante che il *De subtilitate* abbia avuto numerosissime edizioni e sia l'opera di Cardano più diffusa in Europa in assoluto (il solo British Museum di Londra ne possiede undici esemplari), di tale stenografia non resta altra testimonianza, ed è quindi da supporre che non abbia avuto nessuna diffusione.

Kvankam *De subtilitate* havis ege multajn eldonojn kaj estas la verko de Cardano plej disvastiĝinta en Eŭropo entute (la nura Brita Muzeo en Londono posedas dek unu ekzemplerojn), de tia stenografio restas neniu alia atesto, kaj estas do supozinde ke ĝi tute ne disvastiĝis.

Bibliografia / Literaturo

G. Cardano: *Opera omnia.*
A. Cherpillod: *La Dioj de Izraelo*, Courgenard, 1990.
G. Ifrah: *Histoire universelle des Chiffres*, Seghers, Paris, 1981.
Literatura Foiro, dec. 2001.
B. Scimemi (red.): *Atti del Convegno "Gerolamo Cardano, studente a Padova, scienziato europeo"* (in corso di stampa/presata).

Ricevuto /Ricevita 2001-10-22

Indirizzo dell' autore / Adreso de la aŭtoro: Prof. Dr. Carlo Minnaja, Dipartimento di matematica pura ed applicata, Via Belzoni 7, I-35131 Padova

Gerolamo Cardano and the teaching of Arithmetic (in the 500th anniversary of his birth) (Summary)

Gerolamo Cardano (Pavia 1501 – Rome 1576) was a unique person in the scientific world of the European Renaissance: a mathematician as well as a doctor. His works are more than 120, written mostly in Latin; only some of them are translated in some ethnic languages.

A generally unknown small paper, *Tractatus de integris*, was issued only in 1663, in Cardano's *Opera omnia*. No translations have been issued so far, but a short passage in Esperanto. In the *Tractatus* integer numbers are presented as for an elementary teaching: after a short history, the notations are carefully explained, the complete list from one to one hundred is registered, addition with a helpful table is presented. Cardano treats also the crucial test by the remainder of the division by nine and by seven. He invented also a curious stenographic method to write numbers, inspired by the dealers' way to show numbers by fingers.

****

Mitteilungen * Sciigoj * News * Nouvelles * Comunicazioni

LA TRIA STUDJARO DE INTERLINGVISTIKAJ STUDOJ

komenciĝis en la Lingvistika Instituto de UAM (Poznan, Pollando).Tiu ĉi jaro ebligas pliprofundiĝon en iun el la studterenoj - ĉi foje en literaturon kaj interlingvistikon - jam kun la celo pretigi diplomlaboraĵon. Istvan Ertl gvidis la literaturan kaj D-ino Vera Barandovska-Frank la interlingvistikan seminarion. Okazis seminario pri tradukado (d-ino Ilona Koutny) kaj gastprelegis s-inoj Zofia Banet-Fornal, kaj Barbara Pietrzak. La persistaj studantoj venas el Belgio, Britio, Ĉehio, Germanio, Makedonio, Pollando, Svedio kaj Usono, kiu ebligas multflankan diskuton de la traktataj temoj. La Studoj post unu jaro denove akceptos novajn gestudantojn. Kiel jam tradicie, al la scienca programo de la universitata sesio aliĝis la kultura programo de ARKONES, same en Poznan dum la semajnfino. Okazis recitalo el Grabowski far Jerzy Fornal, akompanata de la prezento de la libro pri Grabowski far Zofia Banet-Fornal, prezento de la e-elsendoj de la Pola Radio, tiu de eldonejoj Impeto kaj Sezonoj, miela vespero kun muziko, ktp. Prelegoj interalie pri bona varbado por e-o (Andreas Emmerich), universitata instruado kaj instruista trejnado (Ilona Koutny), pri Waringhien (Korĵenkov), eŭropaj standardoj (Zbigniew Galor) aŭ pri senmanĝa vivstilo (Joachim Werdin) kaj multaj diskutoj..Pri pluraj studebloj informiĝu ĉe Dr Ilona Koutny, membro de AdE gvidanto de Interlingvistikaj Studoj Lingvistika Instituto, Adam Mickiewicz Universitato Miedzychodzka 5, PL-60-371 Poznan T: +48-61-829-27-09 T/F (sekr.): +48-61-829-27-01

Richtlinien für die Kompuskriptabfassung

Außer deutschsprachigen Texten erscheinen ab 2001 auch Artikel in allen vier anderen Arbeitssprachen der Internationalen Akademie der Wissenschaften (AIS) San Marino, also in Internacia Lingvo (ILo), Englisch, Französisch und Italienisch. Bevorzugt werden zweisprachige Beiträge – in ILo und einer der genannten Nationalsprachen - von maximal 14 Druckseiten (ca. 42.000 Anschlägen) Länge. Einsprachige Artikel erscheinen in Deutsch, ILo oder Englisch bis zu einem Umfang von 10 Druckseiten (ca. 30.000 Anschlägen). In Ausnahmefällen können bei Bezahlung einer Mehrseitengebühr auch längere (einsprachige oder zweisprachige) Texte veröffentlicht werden.

Das verwendete Schrifttum ist, nach Autorennamen alphabetisch geordnet, in einem Schrifttumsverzeichnis am Schluss des Beitrags zusammenzustellen – verschiedene Werke desselben Autors chronologisch geordnet, bei Arbeiten aus demselben Jahr nach Zufügung von „a", „b", usf. Die Vornamen der Autoren sind mindestens abgekürzt zu nennen. Bei selbständigen Veröffentlichungen sind anschließend nacheinander Titel (evt. mit zugefügter Übersetzung, falls er nicht in einer der Sprachen dieser Zeitschrift steht), Erscheinungsort und Erscheinungsjahr, womöglich auch Verlag, anzugeben. Zeitschriftenartikel werden - nach dem Titel - vermerkt durch Name der Zeitschrift, Band, Seiten und Jahr. – Im Text selbst soll grundsätzlich durch Nennung des Autorennamens und des Erscheinungsjahrs (evt. mit dem, Zusatz „a" etc.) zitiert werden. – Bevorzugt werden Beiträge, die auf früher in dieser Zeitschrift erschienene Beiträge anderer Autoren Bezug nehmen.

Graphiken (die möglichst als Druckvorlagen beizufügen sind) und auch Tabellen sind als „Bild 1" usf. zu nummerieren und nur so im Text zu erwähnen. Formeln sind zu nummerieren.

Den Schluss des Beitrags bilden die Anschrift des Verfassers und ein Knapptext (500 – 1.500 Anschläge einschließlich Titelübersetzung). Dieser ist in mindestens einer der Sprachen Deutsch, Englisch und ILo, die nicht für den Haupttext verwendet wurde, abzufassen.

Die Beiträge werden in unmittelbar rezensierbarer Form sowie auf Diskette erbeten. Artikel, die erst nach erheblicher formaler, sprachlicher oder inhaltlicher Überarbeitung veröffentlichungsreif wären, werden in der Regel ohne Auflistung aller Mängel zurückgewiesen.

Direktivoj por la pretigo de kompuskriptoj

Krom germanlingvaj tekstoj aperos ekde 2001 ankaŭ arikoloj en ĉiuj kvar aliaj laborlingvoj de la Akademio Internacia de la Sciencoj (AIS) San Marino, do en Internacia Lingvo (ILo), la Angla, la Franca kaj la Itala. Estas preferataj dulingvaj kontribuaĵoj – en ILo kaj en unu el la menciitaj naciaj lingvoj – maksimume 14 prespaĝojn (ĉ. 42.000 tajpsignojn) longaj. Unulingvaj artikoloj aperadas en la Germana, en ILo aŭen la Angla en amplekso ĝis 10 prespaĝoj (ĉ. 30.000 tajpsignoj). En esceptaj kazoj eblas publikigi ankaŭ pli longajn tekstojn (unulingvajn aŭ dulingvajn) post pago de ekscespaĝa kotizo.

La uzita literaturo estu surlistigita je la fino de la teksto laŭ aŭtornomoj ordigita alfabete; plurajn publikaĵojn de la sama aŭtoro bv. surlistigi en kronologia ordo; en kazo de samjareco aldonu „a", „b", ktp. La nompartoj ne ĉefaj estu almenaŭ mallongigite aldonitaj. De monografioj estu – poste – indikitaj laŭvice la titolo (evt. kun traduko, se ĝi ne estas en unu el la lingvoj de ĉi tiu revuo) , la loko kaj la jaro de la apero kaj laŭeble la eldonejo. Artikoloj en revuoj ktp. estu registritaj post la titolo per la nomo de la revuo, volumo, paĝoj kaj jaro. - En la teksto mem bv. citi pere de la aŭtornomo kaj la aperjaro (evt. aldoninte „a" ktp.). - Preferataj estas kontribuaĵoj, kiuj referencas al kontribuaĵoj de aliaj aŭtoroj aperintaj pli frue en ĉi tiu revuo.

Grafikaĵojn (kiuj estas havigendaj laŭeble kiel presoriginaloj) kaj ankaŭ tabelojn bv. numeri per „bildo 1" ktp. kaj mencii en la teksto nur tiel. Formuloj estas numerendaj.

La finon de la kontribuaĵo konstituas la adreso de la aŭtoro kaj resumo (500 – 1.5000 tajpsignoj inkluzive tradukon de la titolo). Ĉi tiu estas vortigenda en minimume unu el la lingvoj Germana, Angla kaj ILo, kiu ne estas uzata por la ĉefteksto.

La kontribuaĵoj estas petataj en senpere recenzebla formo kaj krome sur diskedo. Se artikolo estus publicinda malpli post ampleksa prilaborado formala, lingva aŭ enhava, ĝi estos normale rifuzata sen surlistigo de ĉiuj mankoj.

Regulations concerning the preparation of compuscripts

In addition to texts in German will appear from 2001 onwards also articles in each four other working languages of the International Academy of Sciences (AIS) San Marino, namely in Internacia Lingvo (ILo), English, French and Italian. Articles in two languages – in ILo and one of the mentioned national languages – with a length of not more than 14 printed pages (about 42.000 type-strokes) will be preferred Monolingual articles appear in German, ILo or English with not more than 10 printed pages (about 30.000 type-strokes). Exceptionally also longer texts (in one or two languages) will be published, if a page charge has been paid.

Literature quoted should be listed at the end of the article in alphabetical order of authors' names. Various works by the same author should appear in chronological order of publication. Several items appearing in the same year should be differentiated by the addition of the letters "a", "b", etc. Given names of authors (abbreviated if necessary) should be indicated. Monographs should be named along with place and year of publication and publisher, if known. If articles appearing in journals are quoted, the name, volume, year and page-number should be indicated. Titles in languages other than those of this journal should be accompanied by a translation into one of these if possible. – Quotations within articles must name the author and the year of publication (with an additional letter of the alphabet if necessary). – Preferred will be texts, which refer to articles of other authors earlier published in this journal.

Graphics (fit for printing) and also tables should be numbered "figure 1", "figure 2", etc. and should be referred to as such in the text. Mathematical formulae should be numbered.

The end of the text should form the author's address and a resumee (500 – 1.5000 type-strokes including translation of the title) in at least one of the languages German, ILo and English, which is not used for the main text.

The articles are requested in a form which can immediately be submitted for review, and in digital form, too. If an article would be ready for publication only after much revising work of form, language or content, it will be in normal case refused without listing of all deficiencies.